

Ihre Lösung ist bis zum 13.01.2016 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [5 Punkte] Gittergas aus weichen Teilchen bei $T = 0$

Betrachten Sie ein Gittergas aus weichen Teilchen, welches in Mean-Field-Näherung durch den Hamiltonoperator

$$H = -\frac{J}{2M} \left(\sum_{i=1}^M n_i \right)^2 + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^M n_i (n_i - 1)$$

mit $J \geq 0$ und $U > 0$ beschrieben wird. Das Gitter bestehe aus M Gitterplätzen, n_i bezeichne die Anzahl der Teilchen am Gitterplatz i und $N = \sum_{i=1}^M n_i$ die Gesamtanzahl an Teilchen.

- 0.5 (a) Sei $T = 0$. Zeigen Sie, dass im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung ($J = 0$) eine Energie von $\Delta H = U n_i$ aufgewendet werden muss, um einem Gitterplatz, welcher bereits mit n_i Teilchen besetzt ist, ein weiteres Teilchen hinzuzufügen.
- 2 (b) Es gelte weiterhin $T = 0$, $J = 0$. Das großkanonische Potential ist gegeben durch $G = H - \mu N$. Zeigen Sie, dass jeder einzelne Gitterplatz i den Beitrag $g_i = \frac{U}{2} n_i (n_i - 1) - \mu n_i$ liefert. Zeigen Sie weiterhin $n_i = 0$ für $\mu < 0$ und $n_i = l$ für $(l - 1)U < \mu < lU$, wobei $l = 1, 2, \dots$
Hinweis: Betrachten Sie $g_i(n_i)$ als Funktion von μ . Wo schneiden sich $g_i(n_i + 1)$ und $g_i(n_i)$?
- 1.5 (c) Sei nun $J > 0$ und weiterhin $T = 0$. Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential für homogene Teilchenzahlverteilungen (d. h. $n_i = n \in \mathbb{N}_0 \forall i$) minimal ist.
Hinweis: Vergleichen Sie den Wert von G für einen homogenen Zustand mit dem Wert für denselben Zustand, bei dem ein Teilchen von einem Gitterplatz auf einen anderen verschoben wurde.
- 1 (d) Für die homogenen Zustände gilt somit $G(n) = M g(n)$ mit $g(n) = -\frac{J}{2} n^2 + \frac{U}{2} n(n - 1) - \mu n$. Bestimmen Sie für $U > J$ die Besetzungszahl $n \in \mathbb{N}_0$, für die $g(n)$ bei vorgegebenem μ minimal wird.

2. [3 Punkte] Winkelabhängigkeit der spektralen Intensität

Betrachten Sie elektromagnetische Wellen in einem Kasten mit Volumen V bei der Temperatur T . Die elektromagnetischen Wellen seien im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden des Kastens. In einer Kastenwand befindet sich ein Loch der Fläche dS , dessen Größe so klein ist, dass das Gleichgewicht im Innern nicht gestört wird. Berechnen Sie die spektrale Intensität $I_\lambda(T, \vartheta)$, d. h. die Energie, die pro Zeit- und Flächeneinheit von elektromagnetischen Wellen mit Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ in einen Raumwinkel $d\Omega$, der einen Winkel ϑ mit den Flächennormalen von dS bildet, aus dem Kasten transportiert wird.

3. [5 Punkte] Weißer Zwerg

Hat ein Stern den für die Kernfusion zur Verfügung stehenden Brennstoff verbraucht, so kühlt er durch Abstrahlung ab. Bei niedrigen Temperaturen (im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber $T = 0$) kann der thermische Druck den Gravitationskräften nicht mehr die Waage halten. Die einsetzende Kontraktion führt bei hinreichend massiven Sternen zur Zerquetschung der Atomhüllen. Es entsteht eine „Suppe“ aus Elektronen und Atomkernen, die im Mittel elektrisch neutral ist, sodass die elektromagnetischen Kräfte keine Rolle für das Sterngleichgewicht spielen. Die Elektronen können dann in erster Näherung als ideales Fermigas behandelt werden, dessen Fermidruck der Gravitation entgegenwirkt. Den N_e Elektronen steht das Sternvolumen V zur Verfügung, in dem sie die niedrigsten Niveaus besetzen. Der kinetische Druck der Elektronen wächst mit abnehmendem Volumen, dadurch kann sich ein neues Gleichgewicht ergeben. Der Sterntyp, bei dem der Elektronendruck dem Gravitationsdruck die Waage hält, heißt Weißer Zwerg. Bezeichne η das Verhältnis von Nukleonen zu Protonen im Weißen Zwerg.

- 1 (a) Berechnen Sie den Fermiimpuls p_F in Abhängigkeit von der Elektronendichte $n_e = \frac{N_e}{V}$.
- 2 (b) Zeigen Sie, dass für die Energie des Elektronengases gilt:

$$E_{mat} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f(x_F) \quad \text{mit } x_F = \frac{p_F}{m_e c} \quad \text{und } f(x_F) = \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1 + x^2} \quad .$$

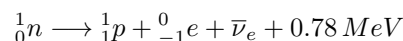
Bestimmen Sie die Lösung des Integrals sowohl im nichtrelativistischen ($x_F \ll 1$) als auch im relativistischen Grenzfall ($x_F \gg 1$) bis zur ersten nicht konstanten Ordnung. Wie skaliert die Energie in den beiden Grenzfällen mit dem Radius R des Weißen Zwerges?

2

- (c) Die potentielle Gravitationsenergie ist gegeben durch $E_{grav} = -\frac{3GM^2}{5R}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Gesamtmasse des Weißen Zwerges bezeichnet. Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Bedingung für die Stabilität des Weißen Zwerges immer erfüllt ist und berechnen Sie seinen Radius in Abhängigkeit von seiner Masse und η . Zeigen Sie weiterhin, dass für den relativistischen Grenzfall eine Obergrenze für die Masse existiert, oberhalb derer der Weiße Zwerg nicht existieren kann, und berechnen Sie diese. Diese Masse wird als Chandrasekhar-Grenzmasse bezeichnet. Geben Sie die Chandrasekhar-Grenzmasse in Abhängigkeit von $\frac{2}{\eta}$ sowie der Sonnenmasse $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ an.

4. [3 Punkte] Neutronenstern

Für einen Stern mit Masse oberhalb der Chandrasekhar-Grenzmasse stürzen nach Verbrauch seines Brennstoffes aufgrund der hohen Gravitationskräfte die Elektronen der Atomhüllen in die Atomkerne und wandeln sich mit den Protonen der Atomkerne zu Neutronen um. Es entsteht somit ein Neutronenstern, welcher in einer vereinfachten Betrachtung ausschließlich aus entarteten Neutronen besteht. Die N_n Neutronen werden als ideales Fermigas bei Temperatur $T = 0$ beschrieben. Ihnen steht das gesamte Volumen V des Neutronensterns zur Verfügung, wobei ihre Dichte innerhalb des gesamten Neutronensterns konstant ist. Ihre aus der großen Masse des Neutronensterns resultierenden großen Impulse müssen relativistisch beschrieben werden. Neutronensterne sind stabil. Freie Neutronen jedoch, aus denen sie bestehen, zeigen einen spontanen β^- -Zerfall gemäß



mit einer Halbwertszeit von $\lambda = 875 \text{ s}$. Wie kann in Anbetracht des Neutronenzerfalls die Stabilität von Neutronensternen erklärt werden? Berechnen Sie für einen Neutronenstern den Anteil an Neutronen, die spontan zerfallen, in Abhängigkeit von seiner Dichte und geben Sie für einen typischen Neutronenstern mit der Dichte $\rho = 10^{12} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$ den Anteil der zerfallenden Neutronen konkret an.

Hinweis: Die maximale Energie der Elektronen, die durch den spontanen Zerfall von Neutronen entstehen, ist durch die Zerfallsenergie von 0.78 MeV gegeben.

5. [4 Punkte] Pauli-Paramagnetismus

Die Elektronen eines Metalls werden als ideales Fermigas mit der Zustandsdichte $z(\varepsilon)$ behandelt. In einem äußeren Magnetfeld B sind die Einteilchenenergien $\varepsilon_\pm = \varepsilon \mp \mu_B B$, wobei das obere Vorzeichen gilt, wenn das magnetische Moment parallel zum Feld ist. Es wird $\mu_B B \ll \varepsilon_F$ vorausgesetzt. Berechnen Sie die Anzahl der parallel (+) und antiparallel (-) eingestellten magnetischen Momente $N_\pm = \sum \bar{n}_\pm(\varepsilon)$ für $T \approx 0$. Für $T \approx 0$ werden die mittleren Besetzungszahlen $\bar{n}_\pm(\varepsilon)$ zu Θ -Funktionen. Bestimmen Sie die Magnetisierung $M(B) = \mu_B \frac{N_+ - N_-}{V}$.