Ihre Lösung ist bis zum 04.11.2015 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*6 Punkte*] **Zentraler Grenzwertsatz**

Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\omega(x)$ und dem endlichen Mittelwert $\overline{X} = \int dx\, x\, \omega(x)$ sowie dem Schwankungsquadrat $\sigma_X^2 \equiv \overline{X^2} - \overline{X}^2$. Wir erzeugen N unabhängige Realisierungen von X. Der Mittelwert

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

ist dann auch eine Zufallsvariable, die der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\Omega(y) = \int dx_1\, dx_2\, \ldots dx_N\, \omega(x_1) \ldots \omega(x_N)\, \delta\!\left(y - \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_N}{N} \right)$$

genügt.

$\boxed{2}$ (a) Beweisen Sie, dass

$$\Omega(y) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\imath k y} \left[\widetilde{\omega}\left(k/N \right) \right]^N$$

ist, wobei $\widetilde{\omega}$ die Fouriertransformierte der Dichte $\omega(x)$ ist.

$\boxed{2}$ (b) Beweisen Sie, dass $\Omega(y)$ im Fall $N \gg 1$ durch eine Gaußverteilung proportional zu $e^{-N(y-\overline{X})^2/\left(2\sigma_X^2\right)}$ approximiert wird.
Hinweis: Entwickeln Sie $\widetilde{\omega}\left(k/N \right)$ nach Ordnungen von k/N und drücken Sie die Koeffizienten als Funktionen von $\overline{X}$ und $\overline{X^2}$ aus.

$\boxed{1}$ (c) Beweisen Sie, dass im Fall $N \gg 1$ gilt:

$$\sigma_Y \equiv \sqrt{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad .$$

$\boxed{1}$ (d) Betrachten Sie die folgenden zwei Wahrscheinlichkeitsdichten:
(1) $\omega(x) = \sqrt{5/12}$ für $|x| \leq \sqrt{3/5}$ und $\omega(x) = 0$ für $|x| > \sqrt{3/5}$,
(2) $\omega(x) = 3/4 \left(1 - x^2 \right)$ für $|x| \leq 1$ und $\omega(x) = 0$ für $|x| > 1$.
Zeigen Sie, dass die beiden Dichten im Limes $N \to \infty$ zur gleichen Dichte $\Omega(y)$ führen.

2. [*3 Punkte*] **Entropie des idealen Gases in d Dimensionen**

Betrachten Sie ein ideales Gas von N Teilchen (N gerade), das sich in einem d dimensionalen Kubus der Kantenlänge L befindet. Zeigen Sie zunächst, dass sich das Phasenraumvolumen zu

$$\Phi(E) \approx \left(\frac{L^d}{N} \right)^N \cdot \left(\frac{4\pi m E}{h^2 d N} \right)^{\frac{dN}{2}} \cdot e^{N\left(1 + \frac{d}{2}\right)}$$

ergibt. Berechnen Sie nun die Entropie des d dimensionalen idealen Gases.

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de

3. [*6 Punkte*] **Entropiebetrachtungen**

1 (a) Beweisen Sie

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \ ,$$

wobei $p = (p_1, \ldots, p_n)$ und $q = (q_1, ..., q_n)$ diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind.
Hinweis: $ln(x) \leq x - 1 \ \forall x > 0$.

1 (b) Zeigen Sie für den Fall des idealen Gases, dass die Boltzmann-Entropie additiv ist.

1 (c) Zeigen Sie im Fall diskreter Zustände, dass die Gibbs-Entropie subadditiv ist, d. h. zeigen Sie $S_G(X+Y) \leq S_G(X) + S_G(Y)$.

1 (d) Zeigen Sie im kontinuerlichen Fall, dass Additivität der Gibbs-Entropie genau dann gegeben ist, wenn die beiden Systeme unkorreliert sind.

2 (e) Zeigen Sie für ein System mit diskreten Zuständen, dass die Maximierung der Gibbs-Entropie des Systems unter der Nebenbedingung konstanter Gesamtenergie E und unter Beachtung der Normierungsbedingung zu einer Boltzmann-Verteilung der Zustände führt.

4. [*5 Punkte*] **2-Zustands-System**

Betrachten Sie N unterscheidbare Teilchen (N gerade), die sich im Grundzustand mit Energie ε_0 oder im angeregten Zustand mit Energie ε_1 befinden können, also $E_i \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Die Gesamtenergie des Systems kann also nur diskrete Werte annehmen; sie beträgt $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon_0 = 0$ (andernfalls ergibt sich eine Verschiebung der Energieskala) und $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

1 (a) Wie viele Mikrozustände existieren zu einer bestimmten Energie E und wie viele Mikrozustände kann das System insgesamt annehmen?

2 (b) Zeigen Sie, dass der relative Anteil $p(E) \left(= \Omega(E) / \Omega_{total}\right)$ von Mikrozuständen mit Energie E im thermodynamischen Limes gegen eine Gaußverteilung mit Mittelwert $\frac{N}{2}$ und Breite $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $p(E) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{n}$ ist mit $E = n \cdot \varepsilon$. Werten Sie anschließend die Binomialverteilung $\binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}$ mithilfe der Stirling-Formel für $N \to \infty$ aus. Welcher Wert ist hierbei für q zu wählen?

1 (c) i. Berechnen Sie die Boltzmann-Entropie $S_B(E)$. Welchen Wert hat sie, wenn sich die Hälfte der Teilchen im angeregten Zustand befindet?

ii. Welchen Wert hat E, wenn sich die Hälfte der Teilchen im angeregten Zustand befindet, und wie sehen für endliches N in diesem Fall die Fluktuationen von E um $\langle E \rangle$ aus?
Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (b).

1 (d) Betrachten Sie ein Subsystem mit $1 \ll N_1 \ll N$ Teilchen, welches Energie mit den restlichen $N_2 = N - N_1$ Teilchen austauschen kann. Im Gesamtsystem mit der konstanten Energie $E = E_1 + E_2$ befindet sich die Hälfte der Teilchen im angeregten Zustand.

i. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, im Subsystem 1 die Energie E_1 zu finden (d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $n_1 = \frac{E_1}{\varepsilon}$ Teilchen des Subsystems angeregt sind).

ii. Berechnen Sie die Temperatur T_1 des Subsystems.
Hinweis: Die Temperatur kann hierbei aufgrund des beschränkten Energiespektrums negativ werden.

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de