Ihre Lösung ist bis zum 11.05.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*11 Punkte*] **Zeitentwicklung einer freien Wellenfunktion**

3 (a) Bestimmen Sie die Eigenfunktion $u_p(x)$ des Impulsoperators $\hat{p}$ zum Eigenwert p im eindimensionalen Ortsraum. Wählen Sie die Normierungskonstante von $u_p(x)$ so, dass die Orthonormierungsbedingung $\langle u_{p'}|u_p\rangle = \delta(p-p')$ erfüllt ist.

2 (b) Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Raumrichtung wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, die sich als Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) = 0$$

(mit einer Anfangsbedingung $\psi(x,0)$) ergibt. Geben Sie eine plausible Begründung dafür, dass sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichnung schreiben lässt als

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\tilde{\psi}(p)\,e^{\frac{\imath}{\hbar}\left[px-\frac{p^2}{2m}t\right]} \quad ,$$

wobei $\tilde{\psi}(p)$ die Fouriertransformierte der anfänglichen Wellenfunktion $\psi(x,0)$ ist.

4 (c) Die zeitliche Entwicklung einer Wellenfunktion kann auch in integraler Form geschrieben werden. Stellen Sie die Lösung $\psi(x,t)$ der Schrödingergleichung für freie Teilchen in der Form

$$\psi(x,t) = \int dx'\,K(x,t;x',0)\psi(x',0) \qquad (*)$$

dar und bestimmen Sie $K(x,t;x',0)$ (Propagator oder auch Greensche Funktion).

2 (d) Der Propagator $K(x,t;x',0)$ hängt nur vom Potential (in dieser Aufgabe ist $V(x)=0$) ab und ist unabhängig von der anfänglichen Wellenfunktion. Ist die anfängliche Wellenfunktion $\psi(x,0)$ gegeben, so kann mithilfe der Relation $(*)$ die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zu einem späteren Zeitpunkt bestimmt werden.
Es sei $\psi(x,0) = \delta(x-x_0)$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion zur Zeit $t > 0$.

2. [*8 Punkte*] **Zweizustandssystem**

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ mit der Matrixdarstellung $\begin{pmatrix}\Delta & A\\ A & -\Delta\end{pmatrix}$ in der gewählten Basis.

2 (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ in der gewählten Basis.

2 (b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t=0$ im Zustand $|\Psi_0\rangle = |\Psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
Stellen Sie $|\Psi_0\rangle$ in der Eigenbasis von $\hat{H}$ dar.

3 (c) Bestimmen Sie den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ des Systems für beliebige Zeiten t. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(t)$ findet man das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t wieder in seinem Anfangszustand $|\Psi_0\rangle$?

1 (d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $\hat{\sigma}^z$ im Zustand $|\Psi(t)\rangle$.
$\hat{\sigma}^z$ hat in der gewählten Basis die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bebla@lusi.uni-sb.de bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*7 Punkte*] **Paritätsoperator**

Der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ ist in der Ortsdarstellung definiert durch $\hat{\Pi}\,|x\rangle = |-x\rangle$, wobei $|x\rangle$ der Eigenket des Ortsoperators $\hat{x}$ zum Eigenwert x ist.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger = \hat{\Pi}^{-1}$ und $\hat{\Pi}^2 = 1$ gilt.

$\boxed{2}$ (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi}$ die Eigenwerte ± 1 hat und die zugehörigen Eigenfunktionen in Ortsdartstellung die geraden bzw. ungeraden Funktionen sind.

$\boxed{3}$ (c) Der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ ist in der Impulsdarstellung definiert durch $\hat{\Pi}\,|p\rangle = |-p\rangle$, wobei $|p\rangle$ der Eigenket des Impulsoperators $\hat{p}$ zum Eigenwert p ist.
Ein Operator $\hat{A}$ heißt gerade (ungerade), wenn $\hat{\Pi}\hat{A}\hat{\Pi}^\dagger = \hat{A}$ ($\hat{\Pi}\hat{A}\hat{\Pi}^\dagger = -\hat{A}$) gilt.
Zeigen Sie, dass der Ortsoperator $\hat{x}$ und der Impulsoperator $\hat{p}$ ungerade Operatoren sind. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{p}^2, \hat{\Pi}]$ und $[\hat{H}, \hat{\Pi}]$ für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, dessen Potential die Eigenschaft $V(\hat{x}) = V(-\hat{x})$ besitzt. Was kann man folglich über die Eigenzustände des Hamiltonoperators aussagen?

4. [*14 Punkte*] **Der Paritätsoperator und das Doppel-Delta-Potential**

Betrachten Sie das Doppel-Delta-Potential (siehe Abbildung 1), das gegeben ist durch

$$V(x) = -\alpha\,[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

mit den positiven, reelen Konstanten a und α. Da für dieses Potential $V(-x) = V(x)$ gilt, ist hier die Parität eine „gute" Quantenzahl. Dies bedeutet, dass die Lösungen Eigenfunktionen des Paritätsoperators $\hat{\Pi}$ zu den Eigenwerten ± 1 sind ($\hat{\Pi}\psi(x) = \psi(-x) = \pm\psi(x)$). Die Lösungen sind also entweder gerade oder ungerade unter $x \to -x$.

(a) Wie viele gebundene Zustände gibt es?

$\boxed{2}$ i. Setzen sie zunächst für die drei verschiedenen Raumbereiche Lösungsfunktionen an.

$\boxed{4}$ ii. Benutzen Sie dann die dem Problem entsprechenden Rand- und Stetigkeitsbedingungen, um die unbekannten Faktoren zu bestimmen.

$\boxed{4}$ iii. Bestimmen Sie sowohl die gerade als auch die ungerade Lösung graphisch.
Hinweis: Nach einer Substitution erhalten Sie Gleichungen der Form $e^{-y} = \pm 1 \mp cy$.

$\boxed{4}$ (b) Finden Sie die erlaubten Energien der gebundenen Zustände für

i. $\alpha = \hbar^2/(ma)$

ii. $\alpha = \hbar^2/(4ma)$

und skizzieren Sie die Wellenfunktionen.
Sind die Wellenfunktionen Eigenzustände des Paritätsoperators?

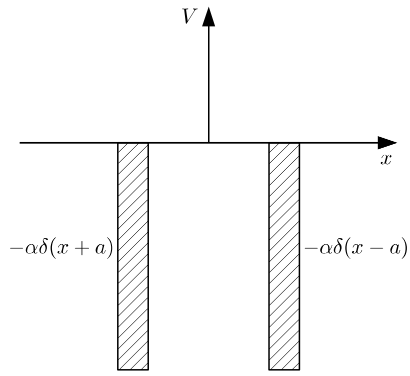

Abbildung 1: Doppel-Delta-Potential

Info: http://www.uni-saarland.de/fak7/rieger/homepage/teaching.html
Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 — bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de