

Ihre Lösung ist bis zum 16.12.2015 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

**1. [9 Punkte] Gittergas - Mean-Field-Modell**

Betrachten Sie Teilchen, die sich auf einem Gitter mit  $M$  Gitterplätzen befinden. Jeder Gitterplatz kann von höchstens einem Teilchen besetzt sein. Das System wird durch

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} n_i n_j$$

beschrieben mit  $n_i = 0, 1$  ( $n_i = 1$ : 1 Teilchen am Gitterplatz  $i$ ,  $n_j = 0$  kein Teilchen am Gitterplatz  $j$ ),  $n = \sum_{i=1}^M n_i$  die Gesamtteilchenzahl und  $J_{ij}$  die Wechselwirkungsstärke zwischen Teilchen auf benachbarten Gitterplätzen. Im Mean-Field-Modell ersetzen wir  $J_{ij}$  durch eine gemittelte Wechselwirkungsstärke  $J_{ij} = \frac{J}{M}$  für alle  $i, j = 1, \dots, M$ .

- [2] (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme  $Z^{(gk)}(M, \mu)$  im Limes  $M \rightarrow \infty$ .
- i. Zeigen Sie zunächst, dass  $Z^{(gk)} = c \cdot \int dn \exp(-M \cdot g(n))$ ,  
 mit  $g(n) = \beta \cdot J \cdot \frac{n^2}{2} - \ln(1 + e^{\beta \cdot (J \cdot n + \mu)})$ .  
**Hinweis:** Hubbard-Stratonovich-Transformation
  - ii. Berechnen Sie  $Z^{(gk)}$  durch Sattelpunktintegration.  
**Hinweis:**  $Z^{(gk)} = c \cdot \exp(-M \cdot g(n_0))$  mit  $n_0$  absolutes Minimum von  $g$
- [1] (b) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential pro Teilchen proportional zu  $g(n_0)$  ist und dass  $n_0 = \left\langle \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_i \right\rangle$  der Erwartungswert der Teilchendichte (= Anzahl Teilchen pro Gitterplatz) ist.
- [1] (c) Zeigen Sie, dass für  $\mu = -\frac{J}{2}$  die Teilchendichte durch  $n_0 = \frac{1}{2}$  gegeben ist.
- [2] (d) Es seien  $\mu_c := -\frac{J}{2}$ ,  $n_c := \frac{1}{2}$ , und  $\Delta\mu := \mu - \mu_c$ ,  $\Delta n := n - n_c$ .
- i. Zeigen Sie, dass die Sattelpunktgleichung  $g'(n) = 0$  geschrieben werden kann als  $\Delta n = \frac{1}{2} \tanh\left\{\frac{\beta}{2}(J\Delta n + \Delta\mu)\right\}$ .
  - ii. Drücken Sie das großkanonische Potential als Funktion von  $\Delta n$  und  $\Delta\mu$  aus.
- [1] (e) Zeigen Sie, dass die kritische Temperatur  $T_c = \frac{J}{4k_B}$  ist. Skizzieren Sie  $g$  als Funktion von  $\Delta n$
- i. für  $T > T_c$  für die Fälle  $\Delta\mu < 0, = 0, > 0$
  - ii. für  $T < T_c$  für die Fälle  $\Delta\mu < 0, = 0, > 0$
- einmal für  $|\Delta\mu| \ll J$ , einmal für  $|\Delta\mu| \gg J$ .
- iii. Diskutieren Sie in i. und ii. die Bedeutung der einzelnen Extrema sowie die Bedeutung der Wendepunkte.
- [1] (f)
  - i. Skizzieren Sie für  $\Delta\mu = 0$  den Verlauf von  $\Delta n$  als Funktion von  $T$ .
  - ii. Skizzieren Sie den Verlauf von  $\Delta n$  als Funktion von  $\Delta\mu$  für  $T > T_c$ ,  $T = T_c$  und  $T < T_c$ .
- [1] (g) Sei  $\frac{|T-T_c|}{T_c} \ll 1$ ,  $\frac{|\mu-\mu_c|}{\mu_c} \ll 1$ . Zeigen Sie
- i. für  $T < T_c$  und  $\mu = -\frac{J}{2}$ :  $n - n_c \propto (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$ ,
  - ii. für  $T = T_c$ :  $n - n_c \propto (\mu - \mu_c)^{\frac{1}{3}}$ ,
  - iii. für  $\mu = \mu_c$ :  $\frac{\partial n}{\partial \mu} \propto |T - T_c|^{-1}$ ,
  - iv. für  $\mu = \mu_c$ , dass  $\frac{\partial g}{\partial T}$  bei  $T = T_c$  springt (d. h. Sprung in der spezifischen Wärme).

## 2. [5 Punkte] Quantenstatistiken für Teilchen

- 2 (a) Betrachten Sie drei freie, unterscheidbare Teilchen in einem Kasten. Die Teilchen befinden sich in Energieeigenzuständen zu den Wellenzahlen  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$ .
- Schreiben Sie alle 3-Teilchenzustände auf.
  - Die Teilchen seien Bosonen. Schreiben Sie alle physikalischen 3-Teilchenzustände auf. Wie sieht es für  $k_1 = k_2 \neq k_3$  aus? Wie für  $k_1 = k_2 = k_3$ ?
  - Die Teilchen seien Fermionen. Schreiben Sie wieder alle physikalischen 3-Teilchenzustände auf. Wie viele gibt es, wenn  $k_i = k_j$  für ein Paar  $i, j$ ?
- 3 (b) Betrachten Sie ein Gas aus nur zwei Teilchen. Jedes Teilchen kann in nur drei möglichen Quantenzuständen  $s = 1, 2, 3$  sein.
- Berechnen Sie für die Maxwell-Boltzmann-Statistik, die Bose-Einstein-Statistik und die Fermi-Dirac-Statistik jeweils das Verhältnis aus  $p_s$  und  $p_d$ , wobei  $p_s$  die Wahrscheinlichkeit, die beiden Teilchen im gleichen Zustand zu finden, und  $p_d$  die Wahrscheinlichkeit, die beiden Teilchen in unterschiedlichen Zuständen zu finden, bezeichnet.
  - Wie erklären sich diese Wahrscheinlichkeiten aus der Form der Wellenfunktion des (2-Teilchen-)Gases? Beachten Sie, dass die Teilchen nicht wechselwirken.

## 3. [3 Punkte] Innere Freiheitsgrade

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas aus Teilchen mit inneren Freiheitsgraden.

- 2 (a) Die Hamilton-Funktion für einen Schwingungsfreiheitsgrad eines Teilchens sei  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$ , wobei  $q$  eine innere Koordinate des Teilchens ist (Ausdehnung um Ruhekonfiguration) und  $k$  eine Konstante. Berechnen Sie die mittlere Schwingungsenergie  $\bar{E}_{vib}$ .
- 1 (b) Welches Ergebnis ist für die mittlere Rotationsenergie  $\bar{E}_{rot}$  bei einem inneren Rotationsfreiheitsgrad des Teilchens zu erwarten?

## 4. [3 Punkte] Spezifische Wärme 3-atomiger Moleküle

Skizzieren Sie die spezifische Wärme  $C$  von

- 1.5 (a) Wasser
- 1.5 (b) Kohlenstoffdioxid

in Einheiten von  $k_B T$  als Funktion der Temperatur  $T$ . Gehen Sie dabei auch auf den Fall derart hoher Temperaturen ein, dass die Moleküle dissoziiert sind.

**Hinweis:** Die Anregungsenergie der Rotationsfreiheitsgrade ist geringer als die der Schwingungsfreiheitsgrade.