9. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 06.01.2016 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*7 Punkte*] **Mean-Field-Modell für XY- und Heisenberg-Ferromagnet**

Betrachten Sie ein System aus N (klassischen) normierten Vektorspins mit 2 bzw. 3 Komponenten, also $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y)$ oder $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ mit $|\boldsymbol{S}| = 1$. Zwischen den Spins bestehe eine ferromagnetische Wechselwirkung, das heißt, eine parallele Orientierung der Spins ist energetisch begünstigt. Die Hamiltonfunktion sei

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j - \boldsymbol{B}\cdot\sum_i \boldsymbol{S}_i$$

mit nichtnegativen Kopplungen $J_{ij} \geq 0$ und einem vektorwertigen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y)$ bzw. $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$. In der Mean-Field-Näherung werden die Kopplungen ersetzt gemäß $J_{ij} = \frac{J}{N}$ $\forall i,j$ mit $J > 0$.

$\boxed{1.5}$ (a) Zeigen Sie (analog zur Vorlesung und zur 8. Übung), dass die kanonische Zustandssumme des Mean-Field-Modells gegeben ist durch

$$Z^{(k)} = c\int d\boldsymbol{m}\,\exp\left\{-N\left(\beta\frac{J}{2}\boldsymbol{m}^2 - \ln\left[\int d\boldsymbol{S}\,\exp\left\{\beta(J\boldsymbol{m}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{S}\right\}\right]\right)\right\} \quad ,$$

wobei c eine Konstante und $\int d\boldsymbol{S}$ das normierte Integral über alle Konfigurationen eines Vektorspins ist.

$\boxed{1.5}$ (b) Führen Sie eine Sattelpunktintegration im Limes $N \to \infty$ durch und zeigen Sie, dass die freie Energie gegeben ist durch $\beta F = N f(\boldsymbol{m}_0)$ mit $f(\boldsymbol{m}) = \beta\frac{J}{2}\boldsymbol{m}^2 - \ln\left[\int d\boldsymbol{S}\,\exp\left\{\beta\left(J\boldsymbol{m}+\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{S}\right\}\right]$ und $\boldsymbol{m}_0$ gegeben durch $\left.\frac{\partial f}{\partial m_i}\right|_{\boldsymbol{m}_0} = 0$ und $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial m_i \partial m_j}\right|_{\boldsymbol{m}_0} \geq 0$.

$\boxed{1}$ (c) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$ für $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ immer eine Lösung der Sattelpunktgleichung ist.

$\boxed{0.5}$ (d) Zeigen Sie, dass für $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ die Funktion $f(\boldsymbol{m})$ nur von $\boldsymbol{m}^2$ abhängt.

$\boxed{0.5}$ (e) Zeigen Sie durch Entwicklung in $\boldsymbol{m}$, dass für kleine $\boldsymbol{m}$ für XY-Spins bzw. für Heisenberg-Spins

$$f(\boldsymbol{m}) = \beta\frac{J}{2}\left(1-\beta\frac{J}{2}\right)\boldsymbol{m}^2 + a\boldsymbol{m}^4 \quad \text{bzw.} \quad f(\boldsymbol{m}) = \beta\frac{J}{2}\left(1-\beta\frac{J}{3}\right)\boldsymbol{m}^2 + b\boldsymbol{m}^4$$

gilt. Skizzieren Sie $f(\boldsymbol{m})$ für den Fall von XY-Spins. Unterscheiden Sie dabei zwischen den Fällen $1-\beta\frac{J}{2} > 0$ und $1-\beta\frac{J}{2} < 0$.

$\boxed{1}$ (f) Folgern Sie: Oberhalb der kritischen Temperatur T_c ist $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$ das absolute Minimum von f, unterhalb von T_c sind alle Magnetisierungsvektoren mit Betrag $|\boldsymbol{m}| \propto \tau^{\frac{1}{2}}$, $\tau = \frac{T_c - T}{T}$, Lösungen der Sattelpunktgleichung. Welchen Wert hat also der kritische Exponent β?
Bemerkung: Die kontinuierliche Entartung des Ordnungsparameters ist Ausdruck der kontinuierlichen Symmetrie des Modells.

$\boxed{0.5}$ (g) Was passiert beim Anlegen eines infinitesimalen Magnetfeldes $\boldsymbol{B}$?

$\boxed{0.5}$ (h) Berechnen Sie $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{B})$ bei $T = T_c$ für kleine $\boldsymbol{B}$ und χ für $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ und kleine τ.

2. [*5 Punkte*] **Ideale Quantengase in d Dimensionen**

Betrachten Sie freie Teilchen (ohne innere Freiheitsgrade) in $d = 1, 2, 3$ Raumdimensionen (d. h. $\boldsymbol{p} = p_x$, (p_x, p_y) oder (p_x, p_y, p_z) mit $\varepsilon_p = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential gegeben ist durch

$$\beta J = \mp\ln(1 \pm z) \pm N\cdot\left(\frac{a}{\lambda_\beta}\right)^d g_{\frac{d+2}{2}}(\mp z) \text{ für Fermionen/Bosonen}$$

mit $N \cdot a^d = L$ $(d=1)$, A $(d=2)$ oder V $(d=3)$ und $g_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^s}$ der Polylogarithmus.
Hinweis: Ersetzen Sie die Impulssumme durch ein Integral und separieren Sie den Beitrag von $p = 0$ zur kanonischen Zustandssumme.

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de

$\boxed{1}$ (b) Zeigen Sie

$$N = \frac{z}{1 \pm z} + N \cdot \left(\frac{a}{\lambda_\beta}\right)^d g_{\frac{d}{2}}\left(\mp z\right) \text{ für Fermionen/Bosonen} \quad .$$

$\boxed{1.5}$ (c) Zeigen Sie, dass für $z \ll 1$ (hohe Verdünnung)

$$\frac{pV}{Nk_BT} \approx 1 \pm 2^{-\frac{d+2}{2}} \left(\frac{\lambda_\beta}{a}\right)^d \text{ für Fermionen/Bosonen}$$

ist. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

$\boxed{0.5}$ (d) Zeigen Sie

$$E = \left(\frac{\partial\left(\beta J\right)}{\partial \beta}\right)_z = \frac{d}{2} pV \quad .$$

3. [*2 Punkte*] **Ultrarelativistische Teilchen**

Für ultrarelativistische Teilchen ($p \gg mc$, c Lichtgeschwindigkeit) ist $\varepsilon_p = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} \approx c\left|p\right|$.

$\boxed{1}$ (a) Berechnen Sie analog zu Aufgabe 2 für ultrarelativistische Teilchen $Z^{(gk)}$, J und N.

$\boxed{1}$ (b) Zeigen Sie, dass für kleine z

$$\frac{pV}{Nk_BT} \approx 1 + c_d \left(\frac{\lambda}{a}\right)^d$$

ist, wobei c_d eine Konstante ist.

4. [*2 Punkte*] **Bose-Einstein-Kondensation im Experiment**

1995 gelang es Anderson et al., die Bose-Einstein-Kondensation in einem verdünnten Gas aus Rubidium 87 Atomen nachzuweisen.

$\boxed{0.5}$ (a) Ist Rubidium 87 (37 Protonen und Elektronen, 50 Neutronen) ein Boson oder ein Fermion?

$\boxed{1.5}$ (b) Die Teilchendichte im Experiment war $n = \frac{N}{V} = 2.5 \cdot 10^{12}\, cm^{-3}$. Bei welcher Temperatur T_c' würden Sie für freie Teilchen das Einsetzen einer Bose-Einstein-Kondensation erwarten? Im Experiment wurden Anzeichen für das Einsetzen von Bose-Einstein-Kondensation unterhalb von $T_c = 170\, nK$ gefunden. Liegt dieser Wert ober- oder unterhalb Ihres Schätzwertes T_c'?

Hinweis: $m\left({}^{87}Rb\right) = 86.909\, u$, $g_{\frac{3}{2}}\left(1\right) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.6124$, $\zeta\left(s\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$: Riemannsche Zetafunktion

5. [*4 Punkte*] **Phononen auf einer schwingenden Saite**

Betrachten Sie eine elastische Saite der Länge L mit Masse μ pro Längeneinheit und Spannungskonstante τ. Transversale Auslenkungen seien durch $u\left(x,t\right)$ beschrieben. Die Energie (pro Längeneinheit) ist

$$\mathcal{H} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad .$$

Die Saite sei bei $x = 0$ und $x = L$ fixiert.

$\boxed{2}$ (a) Berechnen Sie die spezifische Wärme der quantenmechanischen schwingenden Saite.

Hinweis: Führen Sie die Normalmoden q_k mit $u\left(x,t\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k q_k\left(t\right) \sin\left(kx\right)$, $k = n\frac{\pi}{L}$, $n = 1, 2, \ldots, L$ ein, um ein System ungekoppelter harmonischer Oszillatoren zu erhalten.

$\boxed{2}$ (b) Wie lautet die spezifische Wärme der klassischen schwingenden Saite? Unter welchen Bedingungen geht das quantenmechanische Resultat in das klassische Resultat über?

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de

6. [*8 Punkte*] **Bose-Einstein-Kondensation in einer Falle**

In Aufgabe 4 haben wir uns mit der experimentellen Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation befasst. Dabei sind wir von einem verdünnten Gas freier Rubidium 87 Atome ausgegangen. Im realen Experiment befanden sich die Teilchen jedoch in einer Falle, die wir im Folgenden durch einen isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator beschreiben wollen:

$$H = \sum_n \left[\frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\boldsymbol{x}_n^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega \right] \quad .$$

Die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators haben wir hierbei gleich Null gesetzt.
Das zusätzliche Potential führt dazu, dass die Bose-Einstein-Kondensation bereits bei höheren Temperaturen einsetzt. Diese Temperatur wollen wir nun berechnen.

1 (a) Die Energieeigenwerte von H sind bekanntlich $E_n = n\hbar\omega = (n_1 + n_2 + n_3)\,\hbar\omega$ mit n_1, n_2 und n_3 aus $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad des n-ten Energieniveaus des dreidimensionalen harmonischen Oszillators $\rho(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ist.

2 (b) Zeigen Sie, dass für das großkanonische Potential gilt:

$$\beta J = \ln(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) \ln\left(1 - ze^{-\beta\hbar\omega n}\right)$$

mit dem chemischen Potential μ und der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$.

1 (c) Um die Summe durch ein Integral zu ersetzen, benötigen wir die Zustandsdichte $\rho(E)$. ($\rho(E)\,dE =$ Anzahl der Zustände mit Energien zwischen E und $E + dE$)

i. Zeigen Sie, dass für die Zustandsdichte des eindimensionalen harmonischen Oszillators gilt:

$$\rho_1(E) = \frac{1}{\hbar\omega} \quad .$$

ii. Die Zustandsdichte des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist dann:

$$\rho_3(E) = \int d\boldsymbol{E}\, \rho_1(E_1)\,\rho_1(E_2)\,\rho_1(E_3)\,\delta\left(E - (E_1 + E_2 + E_3)\right) \quad .$$

Zeigen Sie: $\rho_3(E) = \dfrac{E^2}{2}\dfrac{1}{(\hbar\omega)^3}$.

2 (d) Mit der Zustandsdichte lässt sich das großkanonische Potential J schreiben als:

$$\beta J = \ln(1-z) + \int_0^\infty dE\, \rho_3(E) \ln\left(1 - ze^{-\beta E}\right) \quad .$$

Zeigen Sie damit, dass für die mittlere Teilchenzahl gilt:

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 g_3(z) \;\text{ mit } N_0 = \frac{z}{1-z} \quad .$$

1.5 (e) Die Temperatur T_c der Bose-Einstein-Kondensation kann bestimmt werden, indem man $N_0 = 0$ und $z = 1$ setzt. Bestimmen Sie T_c und zeigen Sie $\eta := \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$. Berechnen Sie außerdem T_c konkret für das Experiment mit den Rubidium 87 Atomen, wenn die Frequenz der Falle $\omega = 120\,Hz$ beträgt und sich $4 \cdot 10^6$ Atome in der Falle befinden. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem experimentell ermittelten Wert von $170\,nK$ für das Einsetzen der Bose-Einstein-Kondensation sowie mit dem Ergebnis für freie Teilchen.

Hinweis: $g_3(1) = \zeta(3) \approx 1.2021$

0.5 (f) Im Experiment war die harmonische Falle anisotrop, d. h.

$$H = \sum_n \left[\frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_1 x_n^2 + \omega_2 y_n^2 + \omega_3 z_n^2\right) - \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \right] \quad .$$

Was ändert sich in der obigen Argumentation?

Wir wünschen allen Teilnehmern frohe Weihnachten und einen guten Start in das neue Jahr!

Dipl. Phys. Karsten Schwarz, E2 6, Zi.1.04 — corsa@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2 6, Zi.1.04 — thome@lusi.uni-sb.de