0. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Die Aufgaben des Übungsblattes werden in Form einer Präsenzübung in den Übungsgruppen in der Woche vom 23.-27. Oktober besprochen.

1. [*0 Punkte*] **Geh aufs Ganze**

Erinnern Sie sich an die Fernsehsendung: „Geh aufs Ganze“? In dieser Spielshow sollten die Kandidaten eines von drei Toren auswählen. Hinter einem der Tore wartete ein Preis, z. B. ein Auto, und hinter den anderen beiden der Zonk. Der Kandidat wählt ein Tor (z. B. Nr. 2) aus, dieses bleibt jedoch vorerst geschlossen. Der Moderator, der weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet, öffnet eines der anderen beiden Tore, hinter dem der Zonk wartet, und fragt den Kandidaten: „Bleiben Sie bei Nr. 2 oder wechseln Sie das Tor?“. Zeigen Sie mit einer Rechnung, dass jemand, der sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie auskennt, das Tor gewechselt und damit seine Chancen verbessert hätte.

2. [*0 Punkte*] **Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten**

(a) Ihnen stehen k kleine Kugeln und K große Kugeln sowie n kleine Mulden und N große Mulden zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten haben Sie, die Kugeln auf die Mulden zu verteilen, wenn Kugeln derselben Größe ununterscheidbar sind und kleine Kugel nur in kleine Mulden und große Kugeln nur in große Mulden gelegt werden? Wieviele Möglichkeiten sind es, wenn kleine Kugeln auch in große Mulden gelegt werden dürfen? In beiden Fällen darf pro Mulde maximal eine Kugel verwendet werden.

(b) Gegeben sei ein torusförmiges Volumen V mit den Radien R und r. Darin befinden sich N Teilchen der Sorte T_1, die sich innerhalb des Torus frei bewegen können und nicht wechselwirken. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, genau N_1 Teilchen der Sorte T_1 innerhalb eines Teilvolumens V_1 von V zu finden, wobei V_1 die Form einer Kugel mit Radius r hat? Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit an, mindestens N_1 Teilchen der Sorte T_1 im Volumen V_1 zu finden.
Nun werden $M = N/2$ Teilchen einer zweiten Sorte T_2 zugegeben. Wie wahrscheinlich ist es, dass sich in einer Hälfte des Torus genau gleich viele Teilchen der Sorten T_1 und T_2 aufhalten?

(c) Die Krankheiten A und B sind im Umlauf. Es besteht zu 2% die Wahrscheinlichkeit, dass man Krankheit A hat, und zu 5% die Wahrscheinlichkeit, dass man Krankheit B hat. Die Wahrscheinlichkeit, beide Krankheiten zugleich zu haben, liegt bei 1%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man auch Krankheit A hat, wenn man schon Krankheit B hat, sowie die Wahrscheinlichkeit für den umgekehrten Fall.
Der Test auf Krankheit A ist leider nicht perfekt: Hat man nur Krankheit A, ist er zu 99% sicher, hat man jedoch beide Krankheiten A und B, so ist er nur noch zu 26% sicher. Hat man die Krankheit A nicht, liefert der Test trotzdem in 3% der Fälle ein falsches positives Ergebnis. Eine Person wird negativ auf Krankheit A getestet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person die Krankheit A nicht hat.

(d) Ein angetrunkener Millionär betritt ein vollbesetztes Restaurant, in dem 35 nummerierte Tische stehen. Er torkelt durch den Raum und verteilt 21 Einhundert-Euro-Scheine. In seiner Trunkenheit vergisst er sofort wieder, an welchem Tisch er bereits war, sodass ein Tisch auch mehrmals Geld bekommen kann. Am Ende zählen die verwunderten Gäste ihr Geld.

i) Wie viele Möglichkeiten gibt es hier, wenn wir die Tischnummern unterscheiden wollen, die Reihenfolge des Verteilens aber egal ist?

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es mindestens einen Tisch, der mindestens 300 Euro verdient hat?

Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de

3. [*0 Punkte*] **Dichten, Zufallsvariablen und Abbildungen**

(a) Gegeben sei eine beliebige Zufallsvariable X mit zugehöriger stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_X : D \to \mathbb{R}_0^+$ $(D \subset \mathbb{R})$.

   i) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Dichte ρ_Y mit $Y = X^2$ für

      1) $D = \mathbb{R}_0^+$,

      2) $D = \mathbb{R}$.

   ii) Verallgemeinern Sie die Aussage für eine stetig differenzierbare monoton steigende Funktion $Y = f(X)$.

(b) Betrachten wir nun zwei verschiedene Zufallsvariablen X, Y mit
$\rho_X : [0, 1] \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto 2x$,
$\rho_Y : [1, \infty] \to \mathbb{R}_0^+, y \mapsto \frac{1}{y^2}$.
Bestimmen Sie die Dichte ρ_Z für

   1) $Z = X + Y$,

   2) $Z = \frac{X}{Y}$.

4. [*0 Punkte*] **Minimum von Zufallsvariablen**

In vielen Modellen der statistischen Physik, insbesondere der Reaktionskinetik, kennt man die Wahrscheinlichkeitsdichten $\rho_i(t)$ $(t > 0)$ aller N möglichen nächsten Events $i \in \{1, 2, .., N\}$. Häufig bedingen sich diese Events untereinander, da die Zahl der möglichen Reaktionspartner durch vorhergehende Reaktionen verändert wird. Diese Aufgabe beschäftigt sich daher mit den zwei in diesem Zusammenhang wesentlichen Fragen:

- Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_{\text{next}}(t)$ für den Zeitpunkt des ersten eintretenden Events aus?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei dem ersten Event um Eventart i, falls das Event zum Zeitpunkt t stattfindet?

(a) Beantworten Sie obige Fragen für rein exponentiell verteilte Dichten, d.h. $\rho_i(t) = \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t}$.

(b) Beantworten Sie obige Fragen für allgemeine Dichten $\rho_i(t)$.

Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de