

Ihre Lösung ist bis zum 25.10.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [4 Punkte] Vier-Teilchen-System

Ein abgeschlossenes System aus vier unterscheidbaren Teilchen habe die Gesamtenergie $E_{ges} = \sum_{i=1}^4 E_i = 4\varepsilon$. Die Energie jedes einzelnen Teilchens ist ein Vielfaches der Energie ε :

$$E_j = n_j \cdot \varepsilon; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$n_j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad .$$

Ein Mikrozustand r ist folglich durch $r = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ gegeben. Wie viele Mikrozustände gibt es? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_r werden die einzelnen Mikrozustände eingenommen?

2. [6 Punkte] Stirling-Formel

Eine in der statistischen Physik häufig verwendete Formel ist die sogenannte Stirling-Formel

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N + \ln(\sqrt{2\pi N}) \quad \text{bzw.} \quad N! \approx \sqrt{2\pi N} (N/e)^N$$

für $N \rightarrow \infty$.

- 2 (a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass für ganze Zahlen $N \geq 0$ gilt:

$$\Gamma(N+1) = N! \quad \text{mit} \quad \Gamma(N) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{N-1} \quad .$$

- 1 (b) Die Funktion $g_N(x)$ sei definiert durch

$$N! = \int_0^{\infty} dx \exp(Ng_N(x)) \quad .$$

Geben Sie $g_N(x)$ an.

- 1 (c) Berechnen Sie die Lage x_0 des Maximums der Funktion $\exp(Ng_N(x))$. Führen Sie eine Taylorentwicklung von $g_N(x)$ um x_0 bis zur zweiten Ordnung durch.
- 2 (d) Leiten Sie nun die Stirling-Formel her und berechnen bzw. schätzen Sie den (relativen) Beitrag des Terms $\ln(\sqrt{2\pi N})$ für $N = 2, 69, 10^{20}$ ab. **Hinweis:** Benutzen Sie (c).
- 1 (e) Zeigen Sie nun, dass im Fall großer N gilt: $N! \approx (N/e)^N$.

3. [6 Punkte] Volumen der n -dimensionalen Kugel

Das Volumen der n -dimensionalen Kugel mit Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 \cdots \int dx_n}_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n -dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und R den Radius der n -dimensionalen Kugel darstellt.

- 1 (a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1) R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel ist.

- 1 (b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von R unabhängige Anteil?
- 2 (c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}$ aus.

- 1 (d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n -dimensionalen Kugel

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

gilt, wobei $n/2 \Gamma(n/2) = \Gamma(n/2 + 1)$ ist.

- 2 (e) Wir definieren nun

$$f_n(\alpha) := \frac{V_n((1 + \alpha)R) - V_n(R)}{V_n(R)} .$$

Was ist die physikalische Bedeutung von $f_n(\alpha)$? Zeigen Sie die Gültigkeit der Approximation $f_n(\alpha) \approx \exp[\alpha n] - 1$ für $0 < \alpha \leq 1$ und $n \rightarrow \infty$.

4. [4 Punkte] Phasenraumvolumen

Betrachten Sie N ununterscheidbare, nicht wechselwirkende Teilchen in zwei Raumdimensionen, die auf die Fläche A eingespermt sind. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen aller Zustände der Energie $E \leq E_{max}$ und zeigen Sie, dass sich das Phasenraumvolumen für $N \rightarrow \infty$ in der äußeren Kugelschale $\lim_{\delta E \rightarrow 0} E_{max} - \delta E < E < E_{max}$ konzentriert.