# 10. Übung

Ihre Lösung ist bis zum 03.01.2018 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

**1.** [*10 Punkte*] **Bose-Einstein-Kondensation in einer Falle**

In Aufgabe 4 des Übungsblattes 9 haben wir uns mit der experimentellen Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation befasst. Dabei sind wir von einem verdünnten Gas freier Rubidium 87 Atome ausgegangen. Im realen Experiment befanden sich die Teilchen jedoch in einer Falle, die wir im Folgenden durch einen isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator beschreiben wollen:

$$H = \sum_n \left[ \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\boldsymbol{x}_n^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega \right] \quad .$$

Die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators haben wir hierbei gleich Null gesetzt.
Das zusätzliche Potential führt dazu, dass die Bose-Einstein-Kondensation bereits bei höheren Temperaturen einsetzt. Diese Temperatur wollen wir nun berechnen.

1.5 (a) Die Energieeigenwerte von $H$ sind bekanntlich $E_n = n\hbar\omega = (n_1 + n_2 + n_3)\,\hbar\omega$ mit $n_1$, $n_2$ und $n_3$ aus $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad des $n$-ten Energieniveaus des dreidimensionalen harmonischen Oszillators $\rho(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ist.

2.5 (b) Zeigen Sie, dass für das großkanonische Potential gilt:

$$\beta J = \ln(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) \ln\left(1 - z e^{-\beta\hbar\omega n}\right)$$

mit dem chemischen Potential $\mu$ und der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$.

1.5 (c) Um die Summe durch ein Integral zu ersetzen, benötigen wir die Zustandsdichte $\rho(E)$. ($\rho(E)\,dE =$ Anzahl der Zustände mit Energien zwischen $E$ und $E + dE$)

i. Zeigen Sie, dass für die Zustandsdichte des eindimensionalen harmonischen Oszillators gilt:

$$\rho_1(E) = \frac{1}{\hbar\omega} \quad .$$

ii. Die Zustandsdichte des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist dann:

$$\rho_3(E) = \int d\boldsymbol{E}\, \rho_1(E_1)\, \rho_1(E_2)\, \rho_1(E_3)\, \delta(E - (E_1 + E_2 + E_3)) \quad .$$

Zeigen Sie: $\rho_3(E) = \dfrac{E^2}{2}\dfrac{1}{(\hbar\omega)^3}$.

2.5 (d) Mit der Zustandsdichte lässt sich das großkanonische Potential $J$ schreiben als:

$$\beta J = \ln(1-z) + \int_0^{\infty} dE\, \rho_3(E) \ln\left(1 - z e^{-\beta E}\right) \quad .$$

Zeigen Sie damit, dass für die mittlere Teilchenzahl gilt:

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 g_3(z) \text{ mit } N_0 = \frac{z}{1-z} \quad .$$

1.5 (e) Die Temperatur $T_c$ der Bose-Einstein-Kondensation kann bestimmt werden, indem man $N_0 = 0$ und $z = 1$ setzt. Bestimmen Sie $T_c$ und zeigen Sie $\eta := \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$. Berechnen Sie außerdem $T_c$ konkret für das Experiment mit den Rubidium 87 Atomen, wenn die Frequenz der Falle $\omega = 120\,Hz$ beträgt und sich $4 \cdot 10^6$ Atome in der Falle befinden. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem experimentell ermittelten Wert von $170\,nK$ für das Einsetzen der Bose-Einstein-Kondensation sowie mit dem Ergebnis für freie Teilchen.
Hinweis: $g_3(1) = \zeta(3) \approx 1.2021$

$\boxed{0.5}$ (f) Im Experiment war die harmonische Falle anisotrop, d. h.

$$H = \sum_n \left[ \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_1 x_n^2 + \omega_2 y_n^2 + \omega_3 z_n^2\right) - \frac{\hbar}{2}\left(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3\right) \right] \quad .$$

Was ändert sich in der obigen Argumentation?

**2.** [*5 Punkte*] **Gittergas aus weichen Teilchen bei** $T = 0$

Betrachten Sie ein Gittergas aus weichen Teilchen, welches in Mean-Field-Näherung durch den Hamiltonoperator

$$H = -\frac{J}{2M}\left(\sum_{i=1}^{M} n_i\right)^2 + \frac{U}{2}\sum_{i=1}^{M} n_i\left(n_i - 1\right)$$

mit $J \geq 0$ und $U > 0$ beschrieben wird. Das Gitter bestehe aus $M$ Gitterplätzen, $n_i$ bezeichne die Anzahl der Teilchen am Gitterplatz $i$ und $N = \sum_{i=1}^{M} n_i$ die Gesamtanzahl an Teilchen.

$\boxed{0.5}$ (a) Sei $T = 0$. Zeigen Sie, dass im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung ($J = 0$) eine Energie von $\Delta H = U n_i$ aufgewendet werden muss, um einem Gitterplatz, welcher bereits mit $n_i$ Teilchen besetzt ist, ein weiteres Teilchen hinzuzufügen.

$\boxed{2}$ (b) Es gelte weiterhin $T = 0$, $J = 0$. Das großkanonische Potential ist gegeben durch $G = H - \mu N$. Zeigen Sie, dass jeder einzelne Gitterplatz $i$ den Beitrag $g_i = \frac{U}{2} n_i\left(n_i - 1\right) - \mu n_i$ liefert. Zeigen Sie weiterhin $n_i = 0$ für $\mu < 0$ und $n_i = l$ für $(l-1)\,U < \mu < lU$, wobei $l = 1, 2, \ldots$.
Hinweis: Betrachten Sie $g_i\left(n_i\right)$ als Funktion von $\mu$. Wo schneiden sich $g_i\left(n_i + 1\right)$ und $g_i\left(n_i\right)$?

$\boxed{1.5}$ (c) Sei nun $J > 0$ und weiterhin $T = 0$. Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential für homogene Teilchenzahlverteilungen (d. h. $n_i = n \in \mathbb{N}_0\ \forall i$) minimal ist.
Hinweis: Vergleichen Sie den Wert von $G$ für einen homogenen Zustand mit dem Wert für denselben Zustand, bei dem ein Teilchen von einem Gitterplatz auf einen anderen verschoben wurde.

$\boxed{1}$ (d) Für die homogenen Zustände gilt somit $G(n) = M g(n)$ mit $g(n) = -\frac{J}{2} n^2 + \frac{U}{2} n(n-1) - \mu n$. Bestimmen Sie für $U > J$ die Besetzungszahl $n \in \mathbb{N}_0$, für die $g(n)$ bei vorgegebenem $\mu$ minimal wird.

**3.** [*6 Punkte*] **Weißer Zwerg**

Hat ein Stern den für die Kernfusion zur Verfügung stehenden Brennstoff verbraucht, so kühlt er durch Abstrahlung ab. Bei niedrigen Temperaturen (im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber $T = 0$) kann der thermische Druck den Gravitationskräften nicht mehr die Waage halten. Die einsetzende Kontraktion führt bei hinreichend massiven Sternen zur Zerquetschung der Atomhüllen. Es entsteht eine „Suppe“ aus Elektronen und Atomkernen, die im Mittel elektrisch neutral ist, sodass die elektromagnetischen Kräfte keine Rolle für das Sterngleichgewicht spielen. Die Elektronen können dann in erster Näherung als ideales Fermigas behandelt werden, dessen Fermidruck der Gravitation entgegenwirkt. Den $N_e$ Elektronen steht das Sternvolumen $V$ zur Verfügung, in dem sie die niedrigsten Niveaus besetzen. Der kinetische Druck der Elektronen wächst mit abnehmendem Volumen, dadurch kann sich ein neues Gleichgewicht ergeben. Der Sterntyp, bei dem der Elektronendruck dem Gravitationsdruck die Waage hält, heißt Weißer Zwerg. Bezeichne $\eta$ das Verhältnis von Nukleonen zu Protonen im Weißen Zwerg.

$\boxed{1}$ (a) Berechnen Sie den Fermiimpuls $p_F$ in Abhängigkeit von der Elektronendichte $n_e = \frac{N_e}{V}$.

$\boxed{2.5}$ (b) Zeigen Sie, dass für die Energie des Elektronengases gilt:

$$E_{mat} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f\left(x_F\right) \text{ mit } x_F = \frac{p_F}{m_e c} \text{ und } f\left(x_F\right) = \int_0^{x_F} dx\, x^2 \sqrt{1 + x^2} \quad .$$

Bestimmen Sie die Lösung des Integrals sowohl im nichtrelativistischen ($x_F \ll 1$) als auch im relativistischen Grenzfall ($x_F \gg 1$) bis zur ersten nicht konstanten Ordnung. Wie skaliert die Energie in den beiden Grenzfällen mit dem Radius $R$ des Weißen Zwerges?

$\boxed{2.5}$ (c) Die potentielle Gravitationsenergie ist gegeben durch $E_{grav} = -\frac{3GM^2}{5R}$, wobei $G$ die Gravitationskonstante und $M$ die Gesamtmasse des Weißen Zwerges bezeichnet. Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Bedingung für die Stabilität des Weißen Zwerges immer erfüllt ist und berechnen Sie seinen Radius in Abhängigkeit von seiner Masse und $\eta$. Zeigen Sie weiterhin, dass für den relativistischen Grenzfall eine Obergrenze für die Masse existiert,


Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de

oberhalb derer der Weiße Zwerg nicht existieren kann, und berechnen Sie diese. Diese Masse wird als Chandrasekhar-Grenzmasse bezeichnet. Geben Sie die Chandrasekhar-Grenzmasse in Abhängigkeit von $\frac{2}{\eta}$ sowie der Sonnenmasse $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}\,kg$ an.

**qISmaS DatIvjaj chu jatlh 'IvvaD DatIvjaj**


Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de