Ihre Lösung ist bis zum 02.11.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

**1.** [*6 Punkte*] **Zentraler Grenzwertsatz**

Wir betrachten eine Zufallsvariable $X$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\omega(x)$ und dem endlichen Mittelwert $\overline{X} = \int dx\, x\, \omega(x)$ sowie dem Schwankungsquadrat $\sigma_X^2 \equiv \overline{X^2} - \overline{X}^2$. Wir erzeugen $N$ unabhängige Realisierungen von $X$. Der Mittelwert

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

ist dann auch eine Zufallsvariable, die der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\Omega(y) = \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_N\, \omega(x_1) \ldots \omega(x_N)\, \delta\!\left(y - \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_N}{N}\right)$$

genügt.

$\boxed{2}$ (a) Beweisen Sie, dass

$$\Omega(y) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\imath k y} \left[\widetilde{\omega}\left(k/N\right)\right]^N$$

ist, wobei $\widetilde{\omega}$ die Fouriertransformierte der Dichte $\omega(x)$ ist.

$\boxed{2}$ (b) Beweisen Sie, dass $\Omega(y)$ im Fall $N \gg 1$ durch eine Gaußverteilung proportional zu $e^{-N\left(y-\overline{X}\right)^2/\left(2\sigma_X^2\right)}$ approximiert wird.
Hinweis: Entwickeln Sie $\widetilde{\omega}\left(k/N\right)$ nach Ordnungen von $k/N$ und drücken Sie die Koeffizienten als Funktionen von $\overline{X}$ und $\overline{X^2}$ aus.

$\boxed{1}$ (c) Beweisen Sie, dass im Fall $N \gg 1$ gilt:

$$\sigma_Y \equiv \sqrt{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad .$$

$\boxed{1}$ (d) Betrachten Sie die folgenden zwei Wahrscheinlichkeitsdichten:
(1) $\omega(x) = \sqrt{5/12}$ für $|x| \leq \sqrt{3/5}$ und $\omega(x) = 0$ für $|x| > \sqrt{3/5}$ ,
(2) $\omega(x) = 3/4\left(1 - x^2\right)$ für $|x| \leq 1$ und $\omega(x) = 0$ für $|x| > 1$ .
Zeigen Sie, dass die beiden Dichten im Limes $N \to \infty$ zur gleichen Dichte $\Omega(y)$ führen.

**2.** [*3 Punkte*] **Entropie des idealen Gases in $d$ Dimensionen**

Betrachten Sie ein ideales Gas von $N$ Teilchen ($N$ gerade), das sich in einem $d$ dimensionalen Kubus der Kantenlänge $L$ befindet. Zeigen Sie zunächst, dass sich das Phasenraumvolumen zu

$$\Phi(E) \approx \left(\frac{L^d}{N}\right)^N \cdot \left(\frac{4\pi m E}{h^2 d N}\right)^{\frac{dN}{2}} \cdot e^{N\left(1+\frac{d}{2}\right)}$$

ergibt. Berechnen Sie nun die Entropie des $d$ dimensionalen idealen Gases.


Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de

**3.** [*6 Punkte*] **Entropiebetrachtungen**

1 (a) Beweisen Sie

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \ ,$$

wobei $p = (p_1, \ldots, p_n)$ und $q = (q_1, ..., q_n)$ diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind.
Hinweis: $ln(x) \leq x - 1 \ \forall x > 0$.

1 (b) Zeigen Sie für den Fall des idealen Gases, dass die Boltzmann-Entropie additiv ist.

1 (c) Zeigen Sie im Fall diskreter Zustände, dass die Gibbs-Entropie subadditiv ist, d. h. zeigen Sie $S_G(X+Y) \leq S_G(X) + S_G(Y)$.

1 (d) Zeigen Sie im kontinuerlichen Fall, dass Additivität der Gibbs-Entropie genau dann gegeben ist, wenn die beiden Systeme unkorreliert sind.

2 (e) Zeigen Sie für ein System mit diskreten Zuständen, dass die Maximierung der Gibbs-Entropie des Systems unter der Nebenbedingung konstanter Gesamtenergie $E$ und unter Beachtung der Normierungsbedingung zu einer Boltzmann-Verteilung der Zustände führt.

**4.** [*5 Punkte*] **2-Zustands-System**

Betrachten Sie $N$ unterscheidbare Teilchen ($N$ gerade), die sich im Grundzustand mit Energie $\varepsilon_0$ oder im angeregten Zustand mit Energie $\varepsilon_1$ befinden können, also $E_i \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Die Gesamtenergie des Systems kann also nur diskrete Werte annehmen; sie beträgt $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon_0 = 0$ (andernfalls ergibt sich eine Verschiebung der Energieskala) und $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

1 (a) Wie viele Mikrozustände existieren zu einer bestimmten Energie $E$ und wie viele Mikrozustände kann das System insgesamt annehmen?

2 (b) Zeigen Sie, dass der relative Anteil $p(E) \, (= \Omega(E)/\Omega_{total})$ von Mikrozuständen mit Energie $E$ im thermodynamischen Limes gegen eine Gaußverteilung mit Mittelwert $\frac{N}{2}$ und Breite $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $p(E) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{n}$ ist mit $E = n \cdot \varepsilon$. Werten Sie anschließend die Binomialverteilung $\binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}$ mithilfe der Stirling-Formel für $N \to \infty$ aus. Welcher Wert ist hierbei für $q$ zu wählen?

1 (c) i. Berechnen Sie die Boltzmann-Entropie $S_B(E)$. Welchen Wert hat sie, wenn sich die Hälfte der Teilchen im angeregten Zustand befindet?

ii. Welchen Wert hat $E$, wenn sich die Hälfte der Teilchen im angeregten Zustand befindet, und wie sehen für endliches $N$ in diesem Fall die Fluktuationen von $E$ um $\langle E \rangle$ aus?
Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (b).

1 (d) Betrachten Sie ein Subsystem mit $1 \ll N_1 \ll N$ Teilchen, welches Energie mit den restlichen $N_2 = N - N_1$ Teilchen austauschen kann. Im Gesamtsystem mit der konstanten Energie $E = E_1 + E_2$ befindet sich die Hälfte der Teilchen im angeregten Zustand.

i. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, im Subsystem 1 die Energie $E_1$ zu finden (d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $n_1 = \frac{E_1}{\varepsilon}$ Teilchen des Subsystems angeregt sind).

ii. Berechnen Sie die Temperatur $T_1$ des Subsystems.
Hinweis: Die Temperatur kann hierbei aufgrund des beschränkten Energiespektrums negativ werden.


Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de