Ihre Lösung ist bis zum 06.12.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*3 Punkte*] **Saha-Ionisierungsgesetz**

Wir betrachten die Dissoziation von elementarem Wasserstoff in freie Elektronen und Protonen

$$H \leftrightarrow e + p$$

bei Temperaturen $T \ll 10^5\,K$ (Grundzustandsenergie von H: $E_0 = -13,6\,eV$, $|E_0| \hat{=} 1,59 \cdot 10^5\,K$).
Zeigen Sie das Saha-Ionisierungsgesetz für Wasserstoff:

$$\frac{n_e \cdot n_p}{n_H} = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \exp\left(-\frac{|E_0|}{k_B T}\right) \text{ mit } \lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m_e k_B T}}$$

bzw. für $n_e = n_p$:

$$n_e = \frac{\sqrt{n_H}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{|E_0|}{2k_B T}\right) \quad .$$

Dabei bezeichnet n_e die Teilchenzahldichte freier Elektronen, n_p die Teilchenzahldichte freier Protonen und n_H die Teilchenzahldichte von undissoziiertem Wasserstoff.
Diskutieren Sie die Fälle $T \to 0$ und $T \to \infty$. Gehen Sie dabei auf die Entropie ein.
Hinweis: Gehen Sie von der Boltzmann-Statistik aus.

2. [*4 Punkte*] **Virialkoeffizienten**

Bestimmen Sie den zweiten Virialkoeffizienten $b(T)$ sowie die resultierenden Konstanten in der van-der-Waals-Gleichung für:

1.5 (a) harte Kugeln mit Radius σ,

1.5 (b) harte Kugeln mit Radius σ mit einem zusätzlichen attraktiven Bereich $v(r) = -u_0$ für $2\sigma < r < r_0$.

1 (c) Diskutieren Sie das Vorzeichen von $b(T)$ als Funktion von T für die Aufgabenteile (a) und (b) und interpretieren Sie das Resultat. Betrachten Sie dazu die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \to \infty$.

3. [*7 Punkte*] **Kritischer Punkt des van-der-Waals-Gases**

2 (a) Berechnen Sie den kritischen Druck p_c, die kritische Temperatur T_c sowie das kritische molare Volumen v_c für ein van-der-Waals-Gas.

1 (b) Definieren Sie $\tilde{p} = \frac{p}{p_c}$, $\tilde{T} = \frac{T}{T_c}$ und $\tilde{v} = \frac{v}{v_c}$ und leiten Sie damit die dimensionslose (universelle) Form der van-der-Waals-Gleichung her.

4 (c) Wir führen nun eine Entwicklung um den kritischen Punkt durch. Berechnen Sie $f(v)$ durch Integration von $p(v)$ bei konstanter Temperatur T und bestimmen Sie die temperaturabhängige Integrationskonstante $c(T)$ durch Vergleich mit dem idealem Gas. Berechnen Sie $\mu(v)$ bzw. $\mu(n)$ ($n = \frac{1}{v}$). Skizzieren Sie $\Delta n = n - n_c$ als Funktion von $\Delta\mu = \mu - \mu_c$. Entwickeln Sie $\Delta\mu$ in Δn für $\tau = \frac{T-T_c}{T_c} \ll 1$. Zeigen Sie $\Delta n(\tau) \propto \sqrt{|\tau|}$ für $\Delta\mu = 0$, $\tau < 0$ und $|\tau| \ll 1$.

4. [*3 Punkte*] **Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung**

Wir betrachten ein beliebiges Gas aus wechselwirkenden Teilchen im kanonischen Ensemble.

1.5 (a) Leiten Sie Ausdrücke für die Impulsverteilung $P_p(\boldsymbol{p})$ und die Geschwindigkeitsverteilung $P_v(\boldsymbol{v})$ her.

0.5 (b) Leiten Sie die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung $P(v)$ her ($v = |\boldsymbol{v}|$).

1 (c) Berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $\tilde{v}$, die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ und die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat v_{rms} für die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung.

5. [*3 Punkte*] **Druck durch Impulsübertrag**

Zeigen Sie für ein ideales Gas in einem würfelförmigen Volumen V mit Kantenlänge L, dass der Druck durch $p = nm\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$ mit $n = \frac{N}{V}$ gegeben ist und leiten Sie ausgehend hiervon mithilfe der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung die ideale Gasgleichung her.

Dr. Adam Wysocki, Gebäude E2 6, Raum 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de