1. Übung

(Abgabe: bis zum *31. Oktober 2012, 14:15 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

1. [*6 Punkte*] **Runge-Kutta**

Während der Präsenzübung haben sie das Programm predator-prey-ode.cpp kennen gelernt, dass die gewöhnlichen Differnetialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= ru - puv \\ \dot{v} &= -sv + quv \end{aligned} \tag{1}$$

$(r, s, p, q > 0)$ mithilfe des Euler-Verfahrens löst.

(a) Fügen sie nun an der vorbereiteten Stelle das Runge-Kutta-Verfahren ein. Bestimmen sie nun die Lösungen für $p = q = 0$ und testen sie ihr Programm für diesen Fall.

(b) i. Zeigen sie analytisch, dass für alle Trajektorien $u(t)$ und $v(t)$, die Gleichung (1) erfüllen, auch

$$V(u(t), v(t)) = qH(u) + pG(v) = konstant$$

mit $H(u) = u_s \log u - u$ und $G(v) = v_s \log v - v$ gilt.

ii. Zeigen sie schließlich analytisch, dass die Trajektorien im Phasenraum $(u(t), v(t))$ in der Nähe des Fixpuntes $(u_s = \frac{s}{q}, v_s = \frac{r}{p})$ die Ellipsengleichung

$$\frac{\bar{u}^2}{A} + \frac{\bar{v}^2}{B} = 1$$

erfüllen und begründen sie warum A, B positiv sind. Verwenden sie die Koordinaten $(u = \bar{u} + u_s, v = \bar{v} + v_s)$ und die Entwicklung $\log(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$.

(c) Vergleichen sie die Lösungen des Euler-Verfahrens und des Runge-Kutta-Verfahrens in der Nähe des elliptischen Fixpunktes mit dem Ergebnis aus (b). Wählen sie hierfür verschiedene Startwerte und variieren sie die Größe des Zeitschrittes. Bewerten sie das Resultat.

2. [*4 Punkte*] **Hopf-Bifurkation**

Nun betrachten wir ein erweitertes Volterra-Lotka Model:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= ru(1-u) - \frac{puv}{1+ku} \\ \dot{v} &= -sv + \frac{quv}{1+ku} \end{aligned} \tag{2}$$

$(r, s, p, q, k > 0)$

(a) Bestimmen sie analytisch alle stationären Punkte des Systems.

(b) Implementieren sie diese Gleichungen, um sie mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens zu lösen.

(c) Setzen sie von nun an $p = q = 5, s = 1/2, r = 1$. Untersuchen sie numerisch das Verhalten des Systems im Phasenraum $(x(t), y(t))$ in Abhängigkeit von k. Veranschaulichen sie die Hopf-Bifurkation mithilfe von zwei Bildern des Phasenraums und erläutern sie.

(d) Untersuchen sie nun die stationären Punkte analytisch (weiterhin für $p = q = 5, s = 1/2, r = 1$) und bestimmen sie deren Art für $k = 1$ und $k = 2$.