2. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

(Abgabe: bis zum *7. November 2012, 14:15 Uhr*. Sourcecode, Movies usw. in /home/comphys/Abgabe/username/ im Cip Pool. Teil 1 in Postfach von Prof. Rieger oder als Pdf in den Abgabe Ordner.)

Ziel dieser Übung ist es eine numerische Lösung einer Variante des Räuber-Beute Modells zu berechnen. Das betrachtete Modell beinhaltet nun eine Ortsabhängigkeit der Räuber- $v(x, y, t)$ und Beutekonzentration $u(x, y, t)$ in zwei Dimensionen. Die zeitliche Entwicklung wird durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \delta_1 \Delta u + ru\left(1 - \frac{u}{w}\right) - pv\Psi(ku) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta_2 \Delta v + qv\Psi(ku) - sv \\ \Psi &:= \eta \mapsto \tfrac{\eta}{1+\eta}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\delta_1, \delta_2, r, p, k, q, s$ positive Modellparameter sind und Δ der Laplace Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Wir wollen die Gleichung auf einem quadratischen Gebiet $\Omega = [0, L]^2$ der Seitenlänge L lösen. Um die Definition des Systems zu vervollständigen wählen wir Neumannsche Randbedingungen: $\partial u/\partial \mathbf{n} = \partial v/\partial \mathbf{n} = 0$, wobei $\mathbf{n}$ den Normalenvektor am Rand des Simulationsgebietes bezeichnet.

Zur numerischen Lösung diskretisieren wir das Simulationsgebiet durch ein regelmäßiges Gitter mit Gitterkonstante h. Das bedeutet, eine Funktion $f(x, y)$ ist durch ihre Werte an den Gitterplätzen $f(ih, jh) = f_{i,j}$ eindeutig bestimmt, wobei $i, j = 0 \,..\, L/h$. Es läßt sich zeigen, daß die Anwendung des Laplace Operators folgendermaßen approximiert werden kann:

$$(\Delta f)_{i,j} \approx (\Delta_h f)_{i,j} = \frac{1}{h^2}[-4f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1}], \tag{2}$$

wobei Δ_h den diskreten Laplace Operator bezeichnet. Die Randbedingungen benötigen dabei spezielle Behandlung. Betrachten wir zunächst den linken Rand, und stellen uns vor es existieren noch Gitterpunkte für $i = -1$. Wegen der Randbedingung, gilt dann an jedem Platz $(0, j)$: $\partial f/\partial x \approx (f_{0,j} - f_{-1,j})/h^2 = 0$. Damit läßt sich der Funktionswert an dem gedachten Punkt $f_{i-1,j}$, sowie ein $f_{i,j}$ aus GL. (2) eleminieren. Analoges gilt für die anderen Ränder.

Die Zeit diskretisieren wir in konstante Schritte der Länge τ und schreiben für eine Funktion der Zeit am n-ten Zeitschritt $f(n\tau) = f^n$. Die zeitliche Ableitung diskretisieren wir mit der Eulermethode. Sei $\partial f/\partial t = F[f]$ eine Differential Gleichung mit dem Operator F. Dann wird f^{n+1} gegeben durch

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = F[f^n] \tag{3}$$

Der Zeitschritt für das diskretisierte Räuber-Beute System (1) sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \tau\left[\delta_1(\Delta_h u^n)_{i,j} + ru_{i,j}^n\left(1 - \frac{u_{i,j}^n}{w}\right) - pv_{i,j}^n\Psi(ku_{i,j}^n)\right] \\ v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^n + \tau\left[\delta_2(\Delta_h v^n)_{i,j} + qv_{i,j}^n\Psi(ku_{i,j}^n) - sv_{i,j}^n\right] \end{aligned} \tag{4}$$

1. [*2 Punkte*] **Ein bischen Theorie**
   (a) Leiten sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die Approximation des Laplace Operators in 1d $\Delta f \approx \frac{1}{h^2}(-2f_i + f_{i-1} + f_{i+1})$ her und bestimmen sie die Ordnung des Fehlers in h.
   (b) Geben sie eine plausible Erklärung (oder Beweis wenn sie wollen) für das Stabilitätskriterium $\frac{2D\tau}{h^2} \leq 1$ an.

2. [*5 Punkte*] **Programmierung: Finite Differenzen und Euler Verfahren**
   Implementieren sie die Zeitintegration wie in GL. (4) angegeben. Vervollständigen sie dazu den Rumpf der *integrate* Funktion. Verwenden sie die Approximation für den Laplace Operator wie in GL. (2). Tip: Da der Laplace Operator zwei mal auftaucht macht es Sinn eine Unterfunktion zu schreiben, die die Wirkung des Operators auf einen Datenvektor einer Spezies berechnet. Da die Datenvektoren eindimensional sind müssen die Gitterplätze durchnummeriert werden z.b. für einen Platz (i, j): $k = lj + i$, wobei k die Nummer des Gitterplatzes und l die Anzahl der Gitterplätze entlang der x-Axe sind.

3. [*3 Punkte*] **Bilder**
   Testen sie ihr Program mit folgenden Parametern: $d1 = d2 = r = p = w = q = 1, s = 1/2, k = 5, L = 200, \tau = 1/10, h = 1$. Das Program erzeugt Datenfiles die Gnuplot verarbeiten kann. Das beigelegte Skript *plot.sh* erstellt einen Plot im EPS Format für jeweils ein Datenfile. Erstellen sie einen Plot für den Zeitpunkt $t = 300$. Optional können sie mit Hilfe des Skripts *plot.py* eine Serie von Einzelbildern und daraus ein Video erzeugen. Die Umwandlung in eine Videodatei lässt sich z.B. mit *mencoder* oder *avidemux* durchführen. Hinweis: Es sollten sowohl für Räuber als auch Beutekonzentration Spiralwellen zu sehen sein.

Infos und aktuelle Übungsblätter finden Sie unter: http://www.uni-saarland.de/fak7/rieger/homepage/teaching.html
Bei Fragen E-Mail an: mwelter@lusi.uni-sb.de