1. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 23.10.2013 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*4 Punkte*] **Wahrscheinlichkeiten**

$\boxed{1}$ (a) Ihnen stehen k kleine Kugeln und K große Kugeln sowie n kleine Mulden und N große Mulden zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten haben Sie, die Kugeln auf die Mulden zu verteilen, wenn Kugeln derselben Größe ununterscheidbar sind und kleine Kugel nur in kleine Mulden und große Kugeln nur in große Mulden gelegt werden? Wieviele Möglichkeiten sind es, wenn kleine Kugeln auch in große Mulden gelegt werden dürfen?

$\boxed{1}$ (b) Gegeben sei ein torusförmiges Volumen V mit den Radien R und r. Darin befinden sich N Teilchen der Sorte T_1, die sich innerhalb des Torus frei bewegen können und nicht wechselwirken. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, genau N_1 Teilchen der Sorte T_1 innerhalb eines Teilvolumens V_1 von V zu finden, wobei V_1 die Form einer Kugel mit Radius r hat? Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit an, mindestens N_1 Teilchen der Sorte T_1 im Volumen V_1 zu finden.
Nun werden $M = {}^N\!/_2$ Teilchen einer zweiten Sorte T_2 zugegeben. Wie wahrscheinlich ist es, dass sich in einer Hälfte des Torus genau gleich viele Teilchen der Sorten T_1 und T_2 aufhalten?

$\boxed{2}$ (c) Die Krankheiten A und B sind im Umlauf. Es besteht zu 2% die Wahrscheinlichkeit, dass man Krankheit A hat, und zu 5% die Wahrscheinlichkeit, dass man Krankheit B hat. Die Wahrscheinlichkeit, beide Krankheiten zugleich zu haben, liegt bei 1%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man auch Krankheit A hat, wenn man schon Krankheit B hat, sowie die Wahrscheinlichkeit für den umgekehrten Fall.
Der Test auf Krankheit A ist leider nicht perfekt: Hat man nur Krankheit A, ist er zu 99% sicher, hat man jedoch beide Krankheiten A und B, so ist er nur noch zu 26% sicher. Hat man die Krankheit A nicht, liefert der Test trotzdem in 3% der Fälle ein falsches positives Ergebnis. Eine Person wird negativ auf Krankheit A getestet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person die Krankheit A nicht hat.

2. [*4 Punkte*] **Geh aufs Ganze**

Erinnern Sie sich an die Fernsehsendung: „Geh aufs Ganze“? In dieser Spielshow sollten die Kandidaten eines von drei Toren auswählen. Hinter einem der Tore wartete ein Preis, z. B. ein Auto, und hinter den anderen beiden der Zonk. Der Kandidat wählt ein Tor (z. B. Nr. 2) aus, dieses bleibt jedoch vorerst geschlossen. Der Moderator, der weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet, öffnet eines der anderen beiden Tore, hinter dem der Zonk wartet, und fragt den Kandidaten: „Bleiben Sie bei Nr. 2 oder wechseln Sie das Tor?“. Zeigen Sie mit einer Rechnung, dass jemand, der sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie auskennt, das Tor gewechselt und damit seine Chancen verbessert hätte.

3. [*4 Punkte*] **Vier-Teilchen-System**

Ein abgeschlossenes System aus vier unterscheidbaren Teilchen habe die Gesamtenergie $E_{ges} = \sum_{i=1}^{4} E_i = 4\varepsilon$. Die Energie jedes einzelnen Teilchens ist ein Vielfaches der Energie ε:

$$E_j = n_j \cdot \varepsilon;\; j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$$
$$n_j = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4 \quad .$$

Ein Mikrozustand r ist folglich durch $r = (n_1,\, n_2,\, n_3,\, n_4)$ gegeben. Wie viele Mikrozustände gibt es? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_r werden die einzelnen Mikrozustände eingenommen?

4. [*7 Punkte*] **Stirling-Formel**

Eine in der statistischen Physik häufig verwendete Formel ist die sogenannte Stirling-Formel

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N + \ln(\sqrt{2\pi N}) \quad \text{bzw.} \quad N! \approx \sqrt{2\pi N}\, ({}^N\!/_e)^N$$

für $N \to \infty$.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass für ganze Zahlen $N \geq 0$ gilt:

$$\Gamma(N+1) = N! \quad \text{mit } \Gamma(N) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{N-1} \quad .$$

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1
bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de

1 (b) Die Funktion $g_N(x)$ sei definiert durch

$$N! = \int_0^\infty dx\, \exp\left(N g_N(x)\right).$$

Geben Sie $g_N(x)$ an.

1 (c) Berechnen Sie die Lage x_0 des Maximums der Funktion $\exp\left(N g_N(x)\right)$. Führen Sie eine Taylorentwicklung von $g_N(x)$ um x_0 bis zur zweiten Ordnung durch.

2 (d) Leiten Sie nun die Stirling-Formel her und berechnen bzw. schätzen Sie den (relativen) Beitrag des Terms $\ln(\sqrt{2\pi N})$ für $N = 2,\, 69,\, 10^{20}$ ab. Hinweis: Benutzen Sie (c).

1 (e) Zeigen Sie nun, dass im Fall großer N gilt: $N! \approx \left({}^{N}\!/\!{}_{e}\right)^N$.

5. [*7 Punkte*] **Volumen der n-dimensionalen Kugel**

Das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 \ldots \int dx_n}_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n-dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und R den Radius der n-dimensionalen Kugel darstellt.

1 (a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1)\, R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

1 (b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von R unabhängige Anteil?

2 (c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, e^{-\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{x-1}$ aus.

1 (d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n-dimensionalen Kugel

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(n/2 + 1\right)}$$

gilt, wobei $n/2\, \Gamma\left(n/2\right) = \Gamma\left(n/2 + 1\right)$ ist.

2 (e) Wir definieren nun

$$f_n(\alpha) := \frac{V_n\left((1+\alpha) R\right) - V_n(R)}{V_n(R)} \quad .$$

Was ist die physikalische Bedeutung von $f_n(\alpha)$? Zeigen Sie die Gültigkeit der Approximation $f_n(\alpha) \approx \exp[\alpha n] - 1$ für $0 < \alpha \leq 1$ und $n \to \infty$.

6. [*4 Punkte*] **Phasenraumvolumen**

Betrachten Sie N ununterscheidbare, nicht wechselwirkende Teilchen in zwei Raumdimensionen, die auf die Fläche A eingesperrt sind. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen aller Zustände der Energie $E \leq E_{max}$ und zeigen Sie, dass sich das Phasenraumvolumen für $N \to \infty$ in der äußeren Kugelschale $\lim_{\delta E \to 0} E_{max} - \delta E < E < E_{max}$ konzentriert.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bebla@lusi.uni-sb.de bbogner@lusi.uni-sb.de