

Ihre Lösung ist bis zum 08.01.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

**1. [5 Punkte] Gittergas aus weichen Teilchen bei  $T = 0$**

Betrachten Sie ein Gittergas aus weichen Teilchen, welches in Mean-Field-Näherung durch den Hamiltonoperator

$$H = -\frac{J}{2M} \left( \sum_{i=1}^M n_i \right)^2 + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^M n_i (n_i - 1)$$

mit  $J \geq 0$  und  $U > 0$  beschrieben wird. Das Gitter bestehe aus  $M$  Gitterplätzen,  $n_i$  bezeichne die Anzahl der Teilchen am Gitterplatz  $i$  und  $N = \sum_{i=1}^M n_i$  die Gesamtanzahl an Teilchen.

- [1] (a) Sei  $T = 0$ . Zeigen Sie, dass im Grenzfall verschwindender Wechselwirkung ( $J = 0$ ) eine Energie von  $\Delta H = Un_i$  aufgewendet werden muss, um einem Gitterplatz, welcher bereits mit  $n_i$  Teilchen besetzt ist, ein weiteres Teilchen hinzuzufügen.
- [2] (b) Es gelte weiterhin  $T = 0$ ,  $J = 0$ . Das großkanonische Potential ist gegeben durch  $G = H - \mu N$ . Zeigen Sie, dass jeder einzelne Gitterplatz  $i$  den Beitrag  $g_i = \frac{U}{2}n_i(n_i - 1) - \mu n_i$  liefert. Zeigen Sie weiterhin  $n_i = 0$  für  $\mu < 0$  und  $n_i = l$  für  $(l-1)U < \mu < lU$ , wobei  $l = 1, 2, \dots$ .  
**Hinweis:** Betrachten Sie  $g_i(n_i)$  als Funktion von  $\mu$ . Wo schneiden sich  $g_i(n_i+1)$  und  $g_i(n_i)$ ?
- [1] (c) Sei nun  $J > 0$  und weiterhin  $T = 0$ . Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential für homogene Teilchenzahlverteilungen (d. h.  $n_i = n \in \mathbb{N}_0 \forall i$ ) minimal ist.  
**Hinweis:** Vergleichen Sie den Wert von  $G$  für einen homogenen Zustand mit dem Wert für denselben Zustand, bei dem ein Teilchen von einem Gitterplatz auf einen anderen verschoben wurde.
- [1] (d) Für die homogenen Zustände gilt somit  $G(n) = Mg(n)$  mit  $g(n) = -\frac{J}{2}n^2 + \frac{U}{2}n(n-1) - \mu n$ . Bestimmen Sie für  $U > J$  die Besetzungszahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , für die  $g(n)$  bei vorgegebenem  $\mu$  minimal wird.

**2. [12 Punkte] Gittergas aus weichen Teilchen bei  $T > 0$**

In der vorherigen Aufgabe haben wir gezeigt, dass für  $T = 0$  bei  $\mu = lU - (l + \frac{1}{2})J$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$  diskontinuierliche Übergänge von  $n = n_i = l$  nach  $n = n_i = l + 1$  auftreten. Wir zeigen nun, dass für  $T > 0$  ähnliche Übergänge bis zu einer kritischen Temperatur  $T_c$  existieren.

- [2] (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme  $Z^{(gk)}(M, \mu)$  im Limes  $M \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie dazu zunächst, dass  $Z^{(gk)} = c \int dn e^{-Mg(n)}$  mit  $g(n) = \beta J \frac{n^2}{2} - \ln \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^{\beta \{(Jn+\mu)k - \frac{U}{2}k(k-1)\}} \right]$ . Führen Sie dann eine Sattelpunktintegration durch und leiten Sie die Selbstkonsistenzgleichung

$$n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k e^{\beta \{(Jn+\mu)k - \frac{U}{2}k(k-1)\}}}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{\beta \{(Jn+\mu)k - \frac{U}{2}k(k-1)\}}}$$

her.

- [2] (b) Betrachten Sie den Fall großer Abstoßung der Teilchen am selben Gitterplatz  $U \gg J$  und  $U \gg k_B T$ . Betrachten Sie  $\mu = lU + \varepsilon$  mit  $\varepsilon \ll U$ . Diskutieren Sie, dass nur die Summanden  $k = l$  und  $k = l + 1$  in der  $k$ -Summe auf der rechten Seite der Selbstkonsistenzgleichung für  $n$  einen Beitrag liefern.
- [1] (c) Zeigen Sie  $g(n) = \beta J \frac{n^2}{2} - \ln [e^{\beta(Jn+\varepsilon)l} + e^{\beta(Jn+\varepsilon)(l+1)}] - \beta \frac{U}{2}l(l+1)$ .
- [1] (d) Zeigen Sie  $n = \frac{l+(l+1)e^{\beta(Jn+\varepsilon)}}{1+e^{\beta(Jn+\varepsilon)}}$  und folgern Sie  $n = l + \frac{1}{2}$  für  $\varepsilon = -(l + \frac{1}{2})J$ .
- [2] (e) Zeigen Sie  $\Delta n = \frac{1}{2} \tanh \left\{ \frac{\beta}{2} (J\Delta n + \Delta \varepsilon) \right\}$  mit  $\Delta n := n - (l + \frac{1}{2})$  und  $\Delta \varepsilon := \varepsilon + (l + \frac{1}{2})J$  und diskutieren Sie hiermit, was mit  $n$  in der Nähe von  $\mu = lU - (l + \frac{1}{2})J$  passiert.
- [2] (f) Bestimmen Sie die kritische Temperatur und skizzieren Sie  $n$  als Funktion von  $\mu$  zwischen  $\mu = -U$  und  $\mu = 5U$  für tiefe Temperaturen ( $k_B T \ll J$ ) und hohe Temperaturen ( $k_B T \gg J$ ).
- [1] (g) Es liegt also jeweils für  $l = 0, 1, 2, \dots$  bei  $(T_c = \frac{J}{4k_B}, \mu_c = lU - (l + \frac{1}{2})J)$  ein kritischer Punkt vor. Wie lauten die kritischen Exponenten für diese kritischen Punkte?
- [1] (h) Skizzieren Sie nun auf Basis der obigen Resultate für  $T \geq 0$  das  $\mu$ - $T$ -Phasendiagramm und diskutieren Sie, wodurch sich die verschiedenen Regionen unterscheiden.

**3. [13 Punkte] Bose-Einstein-Kondensation in einer Falle**

In Aufgabe 4 auf dem 9. Übungsblatt haben wir uns mit der experimentellen Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation befasst. Dabei sind wir von einem verdünnten Gas freier Rubidium 87 Atome ausgegangen. Im realen Experiment befanden sich die Teilchen jedoch in einer Falle, die wir im Folgenden durch einen isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator beschreiben wollen:

$$H = \sum_n \left[ \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega}{2} \mathbf{x}_n^2 - \frac{3}{2} \hbar\omega \right] .$$

Die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators haben wir hierbei gleich Null gesetzt. Das zusätzliche Potential führt dazu, dass die Bose-Einstein-Kondensation bereits bei höheren Temperaturen einsetzt. Diese Temperatur wollen wir nun berechnen.

- [2] (a) Die Energieeigenwerte von  $H$  sind bekanntlich  $E_n = n\hbar\omega = (n_1 + n_2 + n_3)\hbar\omega$  mit  $n_1, n_2$  und  $n_3$  aus  $\mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad des  $n$ -ten Energieniveaus des dreidimensionalen harmonischen Oszillators  $\rho(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  ist.
- [3] (b) Zeigen Sie, dass für das großkanonische Potential gilt:

$$\beta J = \ln(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) \ln(1-ze^{-\beta\hbar\omega n})$$

mit dem chemischen Potential  $\mu$  und der Fugazität  $z = e^{\beta\mu}$ .

- [2] (c) Um die Summe durch ein Integral zu ersetzen, benötigen wir die Zustandsdichte  $\rho(E)$ . ( $\rho(E)dE$  = Anzahl der Zustände mit Energien zwischen  $E$  und  $E+dE$ )
- i. Zeigen Sie, dass für die Zustandsdichte des eindimensionalen harmonischen Oszillators gilt:

$$\rho_1(E) = \frac{1}{\hbar\omega} .$$

ii. Die Zustandsdichte des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist dann:

$$\rho_3(E) = \int d\mathbf{E} \rho_1(E_1) \rho_1(E_2) \rho_1(E_3) \delta(E - (E_1 + E_2 + E_3)) .$$

$$\text{Zeigen Sie: } \rho_3(E) = \frac{E^2}{2} \frac{1}{(\hbar\omega)^3} .$$

- [3] (d) Mit der Zustandsdichte lässt sich das großkanonische Potential  $J$  schreiben als:

$$\beta J = \ln(1-z) + \int_0^{\infty} dE \rho_3(E) \ln(1-ze^{-\beta E}) .$$

Zeigen Sie damit, dass für die mittlere Teilchenzahl gilt:

$$N = N_0 + \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(z) \text{ mit } N_0 = \frac{z}{1-z} .$$

- [2] (e) Die Temperatur  $T_c$  der Bose-Einstein-Kondensation kann bestimmt werden, indem man  $N_0 = 0$  und  $z = 1$  setzt. Bestimmen Sie  $T_c$  und zeigen Sie  $\eta := \frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3$ . Berechnen Sie außerdem  $T_c$  konkret für das Experiment mit den Rubidium 87 Atomen, wenn die Frequenz der Falle  $\omega = 120 \text{ Hz}$  beträgt und sich  $4 \cdot 10^6$  Atome in der Falle befinden. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem experimentell ermittelten Wert von  $170 \text{ nK}$  für das Einsetzen der Bose-Einstein-Kondensation sowie mit dem Ergebnis für freie Teilchen.

**Hinweis:**  $g_3(1) = \zeta(3) \approx 1.2021$

- [1] (f) Im Experiment war die harmonische Falle anisotrop, d. h.

$$H = \sum_n \left[ \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega_1 x_n^2 + \omega_2 y_n^2 + \omega_3 z_n^2) - \frac{\hbar}{2} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \right] .$$

Was ändert sich in der obigen Argumentation?

#### 4. [4 Punkte] Winkelabhängigkeit der spektralen Intensität

Betrachten Sie elektromagnetische Wellen in einem Kasten mit Volumen  $V$  bei der Temperatur  $T$ . Die elektromagnetischen Wellen seien im thermischen Gleichgewicht mit den Wänden des Kastens. In einer Kastenwand befindet sich ein Loch der Fläche  $dS$ , dessen Größe so klein ist, dass das Gleichgewicht im Innern nicht gestört wird. Berechnen Sie die spektrale Intensität  $I_\lambda(T, \vartheta)$ , d. h. die Energie, die pro Zeit- und Flächeneinheit von elektromagnetischen Wellen mit Wellenlängen zwischen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  in einen Raumwinkel  $d\Omega$ , der einen Winkel  $\vartheta$  mit den Flächennormalen von  $dS$  bildet, aus dem Kasten transportiert wird.

#### 5. [7 Punkte] Weißer Zwerg

Hat ein Stern den für die Kernfusion zur Verfügung stehenden Brennstoff verbraucht, so kühlt er durch Abstrahlung ab. Bei niedrigen Temperaturen (im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber  $T = 0$ ) kann der thermische Druck den Gravitationskräften nicht mehr die Waage halten. Die einsetzende Kontraktion führt bei hinreichend massiven Sternen zur Zerquetschung der Atomhüllen. Es entsteht eine „Suppe“ aus Elektronen und Atomkernen, die im Mittel elektrisch neutral ist, sodass die elektromagnetischen Kräfte keine Rolle für das Sterngleichgewicht spielen. Die Elektronen können dann in erster Näherung als ideales Fermigas behandelt werden, dessen Fermidruck der Gravitation entgegenwirkt. Den  $N_e$  Elektronen steht das Sternvolumen  $V$  zur Verfügung, in dem sie die niedrigsten Niveaus besetzen. Der kinetische Druck der Elektronen wächst mit abnehmendem Volumen, dadurch kann sich ein neues Gleichgewicht ergeben. Der Sterntyp, bei dem der Elektronendruck dem Gravitationsdruck die Waage hält, heißt Weißen Zwerg. Bezeichne  $\eta$  das Verhältnis von Nukleonen zu Protonen im Weißen Zwerg.

- 1) Berechnen Sie den Fermiimpuls  $p_F$  in Abhängigkeit von der Elektronendichte  $n_e = \frac{N_e}{V}$ .
- 3) Zeigen Sie, dass für die Energie des Elektronengases gilt:

$$E_{mat} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f(x_F) \text{ mit } x_F = \frac{p_F}{m_e c} \text{ und } f(x_F) = \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} .$$

Bestimmen Sie die Lösung des Integrals sowohl im nichtrelativistischen ( $x_F \ll 1$ ) als auch im relativistischen Grenzfall ( $x_F \gg 1$ ) bis zur ersten nicht konstanten Ordnung. Wie skaliert die Energie in den beiden Grenzfällen mit dem Radius  $R$  des Weißen Zwerges?

- 3) (c) Die potentielle Gravitationsenergie ist gegeben durch  $E_{grav} = -\frac{3GM^2}{5R}$ , wobei  $G$  die Gravitationskonstante und  $M$  die Gesamtmasse des Weißen Zwerges bezeichnet. Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Bedingung für die Stabilität des Weißen Zwerges immer erfüllt ist und berechnen Sie seinen Radius in Abhängigkeit von seiner Masse und  $\eta$ . Zeigen Sie weiterhin, dass für den relativistischen Grenzfall eine Obergrenze für die Masse existiert, oberhalb derer der Weiße Zwerg nicht existieren kann, und berechnen Sie diese. Diese Masse wird als Chandrasekhar-Grenzmasse bezeichnet. Geben Sie die Chandrasekhar-Grenzmasse in Abhängigkeit von  $\eta$  sowie der Sonnenmasse  $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  an.

#### 6. [4 Punkte] Neutronenstern

Für einen Stern mit Masse oberhalb der Chandrasekhar-Grenzmasse stürzen nach Verbrauch seines Brennstoffes aufgrund der hohen Gravitationskräfte die Elektronen der Atomhüllen in die Atomkerne und wandeln sich mit den Protonen der Atomkerne zu Neutronen um. Es entsteht somit ein Neutronenstern, welcher in einer vereinfachten Betrachtung ausschließlich aus entarteten Neutronen besteht. Die  $N_n$  Neutronen werden als ideales Fermigas bei Temperatur  $T = 0$  beschrieben. Ihnen steht das gesamte Volumen  $V$  des Neutronensterns zur Verfügung, wobei ihre Dichte innerhalb des gesamten Neutronensterns konstant ist. Ihre aus der großen Masse des Neutronensterns resultierenden großen Impulse müssen relativistisch beschrieben werden. Neutronensterne sind stabil. Freie Neutronen jedoch, aus denen sie bestehen, zeigen einen spontanen  $\beta^-$ -Zerfall gemäß



mit einer Halbwertszeit von  $\lambda = 875 \text{ s}$ . Wie kann in Anbetracht des Neutronenzerfalls die Stabilität von Neutronensternen erklärt werden? Berechnen Sie für einen Neutronenstern den Anteil an Neutronen, die spontan zerfallen, in Abhängigkeit von seiner Dichte und geben Sie für einen typischen Neutronenstern mit der Dichte  $\rho = 10^{12} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$  den Anteil der zerfallenden Neutronen konkret an.

**Hinweis:** Die maximale Energie der Elektronen, die durch den spontanen Zerfall von Neutronen entstehen, ist durch die Zerfallsenergie von  $0.78 \text{ MeV}$  gegeben.