

Ihre Lösung ist bis zum 22.01.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [4 Punkte] Kältemaschine

Betrachten Sie eine Kältemaschine, die nach dem Carnot-Prinzip funktioniert und Wärme von einem kälteren Reservoir der Temperatur T_1 auf ein wärmeres Reservoir der Temperatur T_2 überträgt.

- 2 (a) Bestimmen Sie die Leistungszahl $\varepsilon = \frac{Q_1}{W}$ der Kältemaschine in Abhängigkeit von T_1 und T_2 . Dabei bezeichnet Q_1 die während eines Arbeitszyklus vom kälteren Reservoir aufgenommene Wärmemenge und W die dem System während eines Arbeitszyklus zugeführte Arbeit.
- 2 (b) Zeigen Sie, dass die Leistungszahl zunimmt, wenn man ein zusätzliches Reservoir der Temperatur T_3 mit $T_1 < T_3 < T_2$ hinzufügt.

2. [5 Punkte] Carnot-Prozess mit thermischer Strahlung

Betrachten Sie einen Carnot-Prozess, bei dem als Arbeitsmaterial thermische Strahlung verwendet wird.

- 2 (a) Leiten Sie aus der Zustandssumme einen Ausdruck für pV her.
- 2 (b) Stellen Sie die Adiabatengleichung auf.
- 1 (c) Berechnen Sie C_V und C_p .

3. [8 Punkte] Seiliger-Prozess

Sowohl der Otto- als auch der Diesel-Prozess beschreiben nur näherungsweise die Vorgänge in einem realen Verbrennungsmotor. Während die Verbrennung im Ottomotor isochor erfolgt, erfolgt die Verbrennung im Dieselmotor isobar. Der Seiliger-Prozess stellt eine Mischung aus Otto- und Diesel-Prozess dar, indem die Wärmezufuhr zur besseren Annäherung an die tatsächlich ablaufenden Prozesse in einen isochoren und einen isobaren Teilprozess aufgespalten wird. Die Schritte in einem Arbeitszyklus des Seiliger-Prozesses lauten somit wie folgt:

- 1 - 2: Isentrope Kompression
- 2 - 2': Isochore Wärmezufuhr
- 2' - 3: Isobare Wärmezufuhr
- 3 - 4: Isentrope Expansion
- 4 - 1: Isochore Wärmeabfuhr

- 2 (a) Skizzieren Sie das p - V -Diagramm sowie das T - S -Diagramm des Seiliger-Prozesses. Tragen Sie dabei auch die zu- bzw. abgeführten Wärmemengen ein.
- 3 (b) Wir definieren das Drucksteigerungsverhältnis $\pi = \frac{p'_2}{p_2}$, das Volldruckverhältnis $\varphi = \frac{V_3}{V'_2}$ und das Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$. Zeigen Sie, dass für den thermischen Wirkungsgrad des Seiliger-Prozesses gilt:

$$\eta_{thS} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\pi \cdot \varphi^\kappa - 1}{\pi - 1 + \kappa \cdot \pi \cdot (\varphi - 1)} .$$

Welchen Wert nimmt φ für den Otto-Prozess an, welchen Wert π für den Diesel-Prozess?

- 3 (c) Wir führen nun die Lastindikatoren $\delta = \frac{Q_B}{c_V \cdot T_1}$ und $\psi = \frac{Q_{B_V}}{Q_B}$ ein, wobei Q_{B_V} die während der isochoren und Q_{B_p} die während der isobaren Kompression zugeführte Wärmemenge bezeichnet und $Q_B = Q_{B_V} + Q_{B_p}$. Zeigen Sie

$$\psi = \frac{\pi - 1}{\pi - 1 + \pi \cdot \kappa \cdot (\varphi - 1)} \quad \text{sowie} \quad \delta = \varepsilon^{\kappa-1} \cdot [\pi - 1 + \kappa \cdot \pi \cdot (\varphi - 1)]$$

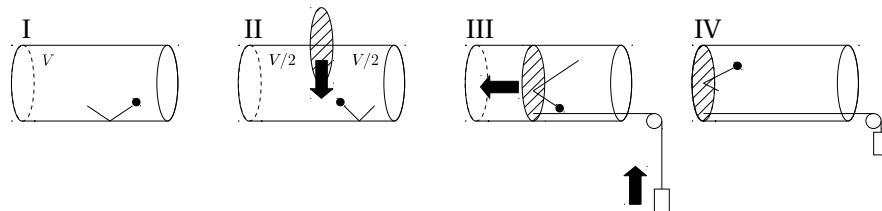
und nutzen Sie dies, um den thermischen Wirkungsgrad auf die folgende Form zu bringen:

$$\eta_{thS} = 1 - \frac{1}{\delta} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\delta \cdot \psi}{\varepsilon^{\kappa-1}} \right) \cdot \left[\frac{\delta \cdot (1 - \psi)}{\kappa \cdot (\varepsilon^{\kappa-1} + \delta \cdot \psi)} + 1 \right]^\kappa - 1 \right\} .$$

Welchen Wert nimmt ψ für den Otto-Prozess, welchen für den Diesel-Prozess an?

4. [5 Punkte] **Szilard-Motor**

1929 stellte der ungarische Physiker Leo Szilard eine klassische, nichtquantenmechanische Analyse des Maxwellschen Dämons vor, indem er als Gedankenexperiment einen idealisierten Wärmemotor mit einem einzelnen Gasmolekül postulierte. Das Gasmolekül befindet sich in einem Zylinder mit Volumen V (I). Im ersten Schritt des Prozesses wird eine dünne, masselose adiabatische Trennwand in den Zylinder eingeführt, die das Volumen V in zwei gleiche Teile unterteilt. Nun bestimmt der Maxwellsche Dämon, in welchem Teilvolumen sich das Gasmolekül befindet, und merkt sich das Resultat (II). Anschließend befestigt er an der Seite der Trennwand, auf der sich das Teilchen befindet, ein Gewicht. Indem die Kammer durch ein äußeres Wärmereservoir auf einer konstanten Temperatur T gehalten wird, erreicht der Dämon, dass das Gasmolekül durch quasistatische isotherme Expansion die Arbeit W verrichtet (III). Das Gas wird in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehren und die Trennwand bis zum Ende des Zylinders verschieben, sodass ihm wieder das gesamte Volumen V zur Verfügung steht (IV). Während der Expansion wird die Wärme Q aus dem Reservoir entnommen, wobei $W = Q$ gilt, da der Prozess isotherm erfolgt. Ein Arbeitszyklus der Maschine besteht somit darin, die Wärmeenergie Q in die gleiche Menge mechanischer Arbeit W umzuwandeln.



- 2 (a) Berechnen Sie die Arbeit W , die durch das Gasmolekül verrichtet wird.
- 1 (b) Erläutern Sie, weshalb der Dämon den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verletzt.
- 2 (c) Um die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes zu bewahren, muss auch die Entropie des Vorganges betrachtet werden. Der Dämon speichert das Bit Information über die Position des Gasmoleküls in seinem Gedächtnis. Durch die Bestimmung der Position des Gasmoleküls wird die Entropie erhöht. Berechnen Sie die Zunahme der Entropie sowie die damit verbundene Arbeit. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der von dem Gasmolekül geleisteten Arbeit in Aufgabenteil (a).

5. [5 Punkte] **Extremaleigenschaften der thermodynamischen Potentiale**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für zwei beliebige Dichteoperatoren $\hat{\rho}$ und $\hat{\rho}'$ gilt:

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho} \ln(\hat{\rho}') \} \leq \text{Tr} \{ \hat{\rho} \ln(\hat{\rho}) \} \quad .$$

Zeigen Sie hiermit:

- 1 (a) Der Dichteoperator der kanonischen Gesamtheit besitzt unter allen Dichteoperatoren mit gleicher Temperatur, die den gleichen Erwartungswert für die innere Energie liefern, die kleinste freie Energie.
- 2 (b) Der Dichteoperator der großkanonischen Gesamtheit besitzt unter allen Dichteoperatoren mit gleicher Temperatur und gleichem chemischen Potential, die den gleichen Erwartungswert für die innere Energie und die Teilchenzahl liefern, das kleinste großkanonische Potential.
- 2 (c) Der Dichteoperator der isotherm-isobaren Gesamtheit ($\hat{\rho}_{ii} = \frac{1}{Z_{ii}} e^{-\beta(\hat{H} + p\hat{V})}$) besitzt unter allen Dichteoperatoren mit gleicher Temperatur und gleichem Druck, die den gleichen Erwartungswert für die innere Energie und das Volumen liefern, die kleinste Gibbsche freie Enthalpie.

6. [3 Punkte] **Äquivalente Formulierungen des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik**

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Formulierungen des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik:

- In einem abgeschlossenen System nimmt die Entropie immer zu oder bleibt konstant ($\Delta S \geq 0$).
- Es gibt keine Zustandsänderung in einem abgeschlossenen System, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niedrigerer Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur ist.
- Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu konstruieren, die nichts weiter bewirkt als die Verrichtung mechanischer Arbeit unter Abkühlung eines Wärmereservoirs.
- Es gibt keine zwischen zwei Temperaturen arbeitende Wärmekraftmaschine, die bei gegebenen Temperaturen der Wärmezufuhr und -abfuhr von T_2 und T_1 einen höheren Wirkungsgrad hat als $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.