Ihre Lösung ist bis zum 29.01.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*7 Punkte*] **Gauß'sche Prozesse**

5 (a) Betrachten Sie den Wiener-Prozess.

i. Berechnen Sie die Hierarchie von P_n.

ii. Zeigen Sie für $0 < t_1 < t_2$:

α) $\langle Y(t_1)\, Y(t_2)\rangle = t_1$

β) $\langle Y(t_2)\rangle_{Y(t_1)} = Y(t_1)$

γ) $\langle\langle Y^2(t_2)\rangle\rangle_{Y(t_1)} = t_2 - t_1$

Hierbei bezeichnet $\langle\,\rangle_z$ einen bedingten Erwartungswert mit der Bedingung, dass der Wert von z konstant ist.

iii. Zeigen Sie, dass P_1 der Diffusionsgleichung $\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ genügt mit $D = \frac{1}{2}$.

2 (b) Zeigen Sie für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:

i. $\langle Y(t)\rangle = 0$

ii. $\kappa(\tau) := \langle Y(\tau)\, Y(0)\rangle = e^{-\tau}$

2. [*4 Punkte*] **Ein-Schritt-Prozesse**

Ein Markov-Prozess ist ein Prozess, bei dem die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeiten, das betrachtete System in einem bestimmten Zustand anzutreffen, nur von der aktuellen Konfiguration und nicht von vorangegangenen Konfigurationen abhängt. Eine besondere Klasse von Markov-Prozessen stellen die Ein-Schritt-Prozesse dar. Bei ihnen handelt es sich um zeitlich kontinuierliche Markov-Prozesse mit diskreten Zuständen, bei denen nur Übergänge zwischen benachbarten Zuständen erlaubt sind. In Abhängigkeit von den erlaubten Zuständen können Ein-Schritt-Prozesse in drei Unterklassen eingeteilt werden:

i. $-\infty < n < \infty$

ii. $n = 0, 1, 2, \ldots$

iii. $n = 0, 1, 2, \ldots, N$

2 (a) Die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Zustände ist durch die Master-Gleichung gegeben, die für den Zustand n eines allgemeinen Markov-Prozesses die Form

$$\dot{p}_n(t) = \sum_{n'} \left\{ W_{n,n'}\, p_{n'}(t) - W_{n',n}\, p_n(t) \right\}$$

hat. $W_{n,n'}$ bezeichnet dabei die Übergangsrate vom Zustand n' in den Zustand n.
Geben Sie die Master-Gleichung für einen Ein-Schritt-Prozess an, wenn $r_n = W_{n-1,n}$ die Übergangsrate vom Zustand n in den Zustand $n-1$ bezeichnet (r: recombination) und $g_n = W_{n+1,n}$ die Übergangsrate vom Zustand n in den Zustand $n+1$ (g: generation). Betrachten Sie gesondert $n = 0$ bzw. $n = N$ im Falle beschränkter Ein-Schritt-Prozesse.

1 (b) Mithilfe der $\mathbf{W}$-Matrix mit

$$\mathbf{W}_{n,n'} = W_{n,n'} - \delta_{n,n'} \sum_{n''} W_{n'',n}$$

kann die Master-Gleichung kompakt in der Form

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \mathbf{W}\boldsymbol{p}(t)$$

aufgeschrieben werden, wobei $\boldsymbol{p}(t)$ der Vektor mit den Komponenten $p_n(t)$ ist.
Zeigen Sie, dass für die Einträge der $\mathbf{W}$-Matrix eines Ein-Schritt-Prozesses gilt:

$$\mathbf{W}_{n,n'} = r_{n'}\delta_{n,n'-1} + g_{n'}\delta_{n,n'+1} - (r_n + g_n)\,\delta_{n,n'} \quad .$$

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1
bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de

1 (c) Die erzeugende Funktion ist definiert als:

$$F(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)\, z^n \quad .$$

Zeigen Sie die folgenden Relationen für $F(z,t)$:

i. $F(z,t)\big|_{z=1} = 1$

ii. $\left.\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z}\right|_{z=1} = \langle n(t)\rangle$

iii. $\left.\dfrac{\partial^2 F(z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=1} = \langle n^2(t)\rangle - \langle n(t)\rangle$

3. [*4 Punkte*] **Poisson-Prozess**

Der Poisson-Prozess ist ein Ein-Schritt-Prozess, der die Häufigkeit eines stochastischen Zufallsereignisses, das mit der konstanten Rate λ eintritt, in einem Zeitintervall zählt. $p_n(t)$ gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, dass das Zufallsereignis bis zum Zeitpunkt t genau n-mal eingetreten ist. Es gilt also $n \geq 0$, $g_n = \lambda$ und $r_n = 0$ für alle n.

1 (a) Stellen Sie die Master-Gleichung des Poisson-Prozesses auf. Unterscheiden Sie dabei zwischen $n \geq 1$ und $n = 0$.

2 (b) Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion des Poisson-Prozesses gilt:

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \lambda (z-1) F(z,t)$$

und nutzen Sie dies, um die Lösung der Master-Gleichung unter der Anfangsbedingung $p_n(0) = \delta_{n,m}$, $m \geq 0$ zu bestimmen:

$$p_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\lambda t} & \text{, falls } n \geq m \\ 0 & \text{, falls } 0 \leq n \leq m-1 \end{cases} \quad .$$

1 (c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von n und n^2 sowie die Varianz von n.

4. [*5 Punkte*] **Radioaktiver Zerfall**

Der radioaktive Zerfall instabiler Atomkerne kann durch einen Ein-Schritt-Prozess beschrieben werden. Die urspüngliche Anzahl an Atomkernen n_0 stellt die obere Schranke für die möglichen Zustände dar, 0 ist die untere Schranke. $p_n(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zum Zeitpunkt t noch n Atomkerne nicht zerfallen sind. Die Zerfälle der Atomkerne sind statistisch unabhängig voneinander und weisen einen feste Zerfallsrate γ auf. Es gilt somit $0 \leq n \leq n_0$, $g_n = 0$ und $r_n = \gamma n$ für alle n.

1 (a) Stellen Sie die Master-Gleichung des Zerfallsprozesses auf. Unterscheiden Sie dabei zwischen $n = n_0$, $0 < n < n_0$ und $n = 0$.

3 (b) Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion des Zerfallsprozesses gilt:

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \gamma \left(\frac{1}{z} - 1\right) \left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) F(z,t)$$

und nutzen Sie dies, um die Lösung der Master-Gleichung unter der Anfangsbedingung $p_n(0) = \delta_{n,n_0}$, $n_0 > 0$ zu bestimmen:

$$p_n(t) = \binom{n_0}{n} e^{-n\gamma t} \left(1 - e^{-\gamma t}\right)^{n_0 - n} \quad .$$

Hinweis: Die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung für $F(z,t)$ lautet für $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ und $r_n = an$, $g_n = b(N-n)$

$$F(z,t) = (a+b)^{-N} \left[a(1-\varepsilon) + (a\varepsilon + b) z\right]^m \left[a + b\varepsilon + b(1-\varepsilon) z\right]^{N-m}$$

mit $\varepsilon = e^{-(a+b)t}$. $m \in \{0, 1, \ldots, N\}$ ist entsprechend den Anfangsbedingungen zu wählen.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 — bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de

1 (c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von n und n^2 sowie die Varianz von n.

5. [*5 Punkte*] **Random Walk**

Der Random Walk beschreibt die zufällige Bewegung eines Teilchens in zwei Raumrichtungen. Die Bewegung in beide Raumrichtungen unterliege keinen Beschränkungen ($-\infty < n < +\infty$) und erfolge mit gleichen Raten $r_n = g_n = 1$ für alle n. Man spricht aus diesem Grund von einem unbeschränkten, symmetrischen Random Walk. $p_n(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt t in einer Entfernung von n Schritten vom seinem Startpunkt befindet.

1 (a) Stellen Sie die Master-Gleichung für den unbeschränkten, symmetrischen Random Walk auf.

2 (b) Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion des Random Walk gilt:

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \left(z + \frac{1}{z} - 2\right) F(z,t)$$

und nutzen Sie dies, um die Lösung der Master-Gleichung unter der Anfangsbedingung $p_n(0) = \delta_{n,0}$ zu bestimmen:

$$p_n(t) = e^{-2t} I_n(2t) \quad .$$

$I_n(2t)$ sind dabei die modifizierten Bessel-Funktionen:

$$I_n(2t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^{2l+n}}{(l+n)!l!} \quad .$$

2 (c) Zeigen Sie zunächst allgemein für die erzeugende Funktion die folgenden Relationen:

i. $\left.\frac{\partial \ln(F(z,t))}{\partial z}\right|_{z=1} = \langle n(t) \rangle$

ii. $\left.\frac{\partial^2 \ln(F(z,t))}{\partial z^2}\right|_{z=1} = \langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2 - \langle n(t) \rangle$

und bestimmen Sie damit die Erwartungswerte von n und n^2 sowie die Varianz von n.

6. [*5 Punkte*] **Fluktuations-Dissipations-Theorem**

Das Fluktuations-Dissipations-Theorem besagt, dass die Reaktion eines Systems im thermischen Gleichgewicht auf eine kleine äußere Störung die gleiche ist wie seine Reaktion auf spontane Fluktuationen und dass speziell der sogenannte dissipative Anteil dieser Reaktion direkt zu den Fluktuationen proportional ist. Dies kann genutzt werden, um eine explizite Beziehung zwischen Molekulardynamik im thermischen Gleichgewicht und makroskopischen Reaktionen auf kleine zeitabhängige Störungen herzustellen. Dadurch erlaubt das Fluktuations-Dissipations-Theorem, mikroskopische Modelle der Gleichgewichts-Statistik zu benutzen, um quantitative Vorhersagen über Materialeigenschaften zu machen, auch wenn diese Abweichungen vom Gleichgewicht beschreiben.

Wir betrachten ein durch das Ising-Modell beschriebenes Spinsystem mit dem magnetischen Gesamtmoment

$$m = \mu \sum_i S_i \quad .$$

Das Fluktuations-Dissipations-Theorem liefert folgenden Zusammenhang zwischen der isothermen Suszeptibilität χ_T und der Spinkorrelation g_{ij}:

$$\chi_T = \beta \mu^2 \frac{\mu_0}{V} \sum_{i,j} g_{ij} \text{ mit } g_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \quad .$$

3 (a) Berechnen Sie die feldfreie ($B_0 = 0$) Suszeptibilität einer Kette aus N Ising-Spins mit freien Randbedingungen. Finden Sie χ_T als Funktion von $v = \tanh(\beta J)$.

2 (b) Untersuchen Sie das Verhalten der Suszeptibilität im thermodynamischen Limes $N \to \infty$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de