

Ihre Lösung ist bis zum 30.10.2013 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [9 Punkte] Entropie

- 1 (a) Beweisen Sie die Gibbs-Ungleichung: $-\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \leq -\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i)$, wobei $p = (p_1, \dots, p_n)$ und $q = (q_1, \dots, q_n)$ diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind.
- 2 (b) Zeigen Sie, dass die Boltzmann-Entropie additiv ist.
- 3 (c) Zeigen Sie, dass die Gibbs-Entropie subadditiv ist, d. h. zeigen Sie $S_G(X+Y) \leq S_G(X) + S_G(Y)$. Zeigen Sie weiterhin, dass Gleichheit genau dann gegeben ist, wenn die beiden Systeme unkorreliert sind.
- 3 (d) Zeigen Sie für ein System mit diskreten Zuständen, dass die Maximierung der Gibbs-Entropie des Systems unter der Nebenbedingung konstanter Gesamtenergie E und unter Beachtung der Normierungsbedingung zu einer Boltzmann-Verteilung der Zustände führt.

2. [4 Punkte] Ideales Gas in ein und zwei Dimensionen

- 2 (a) Berechnen Sie die Entropie sowohl eines ein- als auch eines zweidimensionalen idealen Gases.
- 2 (b) Zeigen Sie, dass für ein ideales Gas die Gibbs-Entropie in die Boltzmann-Entropie übergeht.

3. [8 Punkte] Zentraler Grenzwertsatz

Wir betrachten eine Zufallsvariable x mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\omega(x)$ und dem endlichen Mittelwert $\bar{x} = \int dx x \omega(x)$ sowie dem Schwankungsquadrat $\sigma_x^2 \equiv \overline{x^2} - \bar{x}^2$. Wir erzeugen N unabhängige Realisierungen von x . Der Mittelwert

$$Y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

ist dann auch eine Zufallsvariable, die der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\Omega(Y) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_N \omega(x_1) \dots \omega(x_N) \delta\left(Y - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}\right)$$

genügt.

- 1 (a) Beweisen Sie, dass

$$\Omega(Y) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikY} [\tilde{\omega}(k/N)]^N$$

ist, wobei $\tilde{\omega}$ die Fouriertransformierte der Verteilung $\omega(x)$ ist.

- 3 (b) Beweisen Sie, dass $\Omega(Y)$ im Fall $N \rightarrow \infty$ eine Gaußverteilung proportional zu $e^{-N(Y-\bar{x})^2/(2\sigma_x^2)}$ ist.

Hinweis: Entwickeln Sie $\tilde{\omega}(k/N)$ nach Ordnungen von k/N und drücken Sie die Koeffizienten als Funktionen von \bar{x} und σ_x^2 aus.

- 2 (c) Beweisen Sie, dass im Fall $N \rightarrow \infty$ der Zentrale Grenzwertsatz gilt:

$$\sigma_Y \equiv \sqrt{\overline{Y^2} - \bar{Y}^2} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad .$$

- 2 (d) Betrachten Sie die folgenden zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

- (1) $\omega(x) = \sqrt{5/12}$ für $|x| \leq \sqrt{3/5}$ und $\omega(x) = 0$ für $|x| > \sqrt{3/5}$,
 (2) $\omega(x) = 3(1-x^2)/4$ für $|x| \leq 1$ und $\omega(x) = 0$ für $|x| > 1$.

Zeigen Sie, dass die beiden Verteilungen im Limes $N \rightarrow \infty$ zur gleichen Verteilung $\Omega(Y)$ führen.

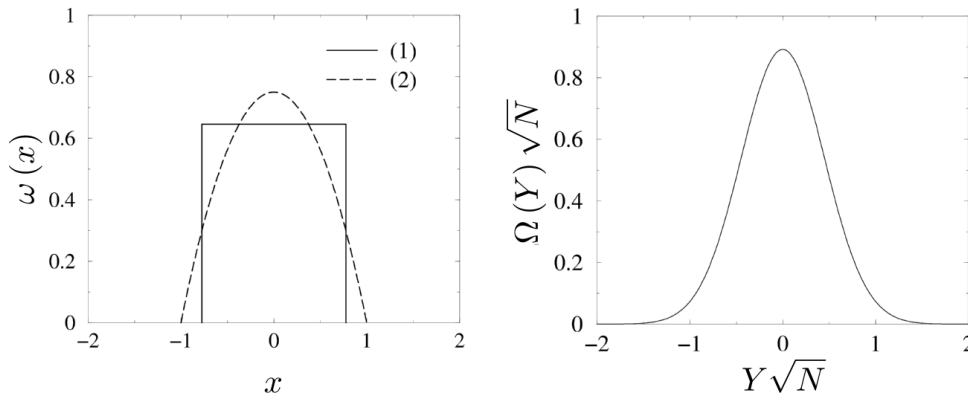


Abbildung 1: Die beiden verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (1) und (2) aus (d) führen im Limes $N \rightarrow \infty$ zur gleichen Verteilungsfunktion $\Omega(Y)$ des Mittelwertes $Y = (x_1 + \dots + x_N)/N$.

4. [9 Punkte] 2-Zustands-System

Betrachten Sie N unterscheidbare Teilchen (N gerade), die sich im Grundzustand mit Energie ε_0 oder im angeregten Zustand mit Energie ε_1 befinden können, also $E_i \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Die Gesamtenergie des Systems kann also nur diskrete Werte annehmen; sie beträgt $E = \sum_{i=1}^N E_i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon_0 = 0$ (andernfalls ergibt sich eine Verschiebung der Energieskala) und $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

- 2 (a) Wie viele (Mikro)Zustände existieren zu einer bestimmten Energie E und wie viele Mikrozustände kann das System insgesamt annehmen?
- 3 (b) Zeigen Sie, dass der relative Anteil $p(E) (= \Omega(E)/\Omega_{total})$ von (Mikro)Zuständen mit Energie E im thermodynamischen Limes gegen eine Gaußverteilung mit Mittelwert $N \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ und Breite $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $p(E) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{n}$ ist mit $E = n \cdot \varepsilon$. Werten Sie anschließend die

Binomialverteilung $\binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}$ mithilfe der Stirling-Formel für $N \rightarrow \infty$ aus.
Welcher Wert ist hierbei für q zu wählen?

- 2 (c) i. Berechnen Sie die Boltzmann-Entropie $S_B(E)$. Welchen Wert hat sie, wenn sich das System im thermodynamischen Gleichgewicht befindet?
ii. Welchen Wert hat E im thermodynamischen Gleichgewicht und wie sehen für endliches N in diesem Fall die Fluktuationen von E um $\langle E \rangle$ aus?
Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (b).

- 2 (d) Betrachten Sie ein Subsystem mit $1 \ll N_1 \ll N$ Teilchen, welches Energie mit den restlichen $N_2 = N - N_1$ Teilchen austauschen kann. Das Gesamtsystem mit der konstanten Energie $E = E_1 + E_2$ befinde sich im thermodynamischen Gleichgewicht.
i. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, im Subsystem 1 die Energie E_1 zu finden (d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $n_1 = \frac{E_1}{\varepsilon}$ Teilchen des Subsystems angeregt sind).
ii. Berechnen Sie die Temperatur T_1 des Subsystems.
Hinweis: Die Temperatur kann hierbei aufgrund des beschränkten Energiespektrums negativ werden.