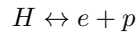


Ihre Lösung ist bis zum 04.12.2013 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [5 Punkte] Saha-Ionisierungsgesetz

Wir betrachten die Dissoziation von elementarem Wasserstoff in freie Elektronen und Protonen



bei Temperaturen $T \ll 10^5 K$ (Grundzustandsenergie von H : $E_0 = -13,6 eV$, $|E_0| \hat{=} 1,59 \cdot 10^5 K$). Zeigen Sie das Saha-Ionisierungsgesetz für Wasserstoff:

$$\frac{n_e \cdot n_p}{n_H} = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \exp\left(-\frac{|E_0|}{k_B T}\right) \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m_e k_B T}}$$

bzw. für $n_e = n_p$:

$$n_e = \frac{\sqrt{n_H}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{|E_0|}{2k_B T}\right) .$$

Dabei bezeichnet n_e die Teilchenzahldichte freier Elektronen, n_p die Teilchenzahldichte freier Protonen und n_H die Teilchenzahldichte von undissoziiertem Wasserstoff.

Diskutieren Sie die Fälle $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$. Gehen Sie dabei auf die Entropie ein.

Hinweis: Gehen Sie von der Boltzmann-Statistik aus.

2. [6 Punkte] Virialkoeffizienten

Bestimmen Sie den zweiten Virialkoeffizienten $b(T)$ sowie die resultierenden Konstanten in der van-der-Waals-Gleichung für:

- 2 (a) harte Kugeln mit Radius σ ,
- 3 (b) harte Kugeln mit Radius σ mit einem zusätzlichen attraktiven Bereich $v(r) = -u_0$ für $2\sigma < r < r_0$.
- 1 (c) Diskutieren Sie das Vorzeichen von $b(T)$ als Funktion von T für die Aufgabenteile (a) und (b) und interpretieren Sie das Resultat. Betrachten Sie dazu die Grenzfälle $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$.

3. [11 Punkte] Kritischer Punkt des van-der-Waals-Gases

- 3 (a) Berechnen Sie den kritischen Druck p_c , die kritische Temperatur T_c sowie das kritische molare Volumen v_c für ein van-der-Waals-Gas.
- 1 (b) Definieren Sie $\tilde{p} = \frac{p}{p_c}$, $\tilde{T} = \frac{T}{T_c}$ und $\tilde{v} = \frac{v}{v_c}$ und leiten Sie damit die dimensionslose (universelle) Form der van-der-Waals-Gleichung her.
- 7 (c) Wir führen nun eine Entwicklung um den kritischen Punkt durch. Berechnen Sie $f(v)$ durch Integration von $p(v)$ bei konstanter Temperatur T und bestimmen Sie die temperaturabhängige Integrationskonstante $c(T)$ durch Vergleich mit dem idealem Gas. Berechnen Sie $\mu(v)$ bzw. $\mu(n)$ ($n = \frac{1}{v}$). Skizzieren Sie $\Delta n = n - n_c$ als Funktion von $\Delta\mu = \mu - \mu_c$. Entwickeln Sie $\Delta\mu$ in Δn für $\tau = T - T_c \ll 1$. Zeigen Sie $\Delta n(\tau) \propto \sqrt{|\tau|}$ für $\Delta\mu = 0$, $\tau < 0$ und $|\tau| \ll 1$.

4. [5 Punkte] Maxwellische Geschwindigkeitsverteilung

Wir betrachten ein beliebiges Gas aus wechselwirkenden Teilchen im kanonischen Ensemble.

- 2 (a) Leiten Sie Ausdrücke für die Impulsverteilung $P_p(\mathbf{p})$ und die Geschwindigkeitsverteilung $P_v(\mathbf{v})$ her.
- 1 (b) Leiten Sie die Maxwellische Geschwindigkeitsverteilung $P(v)$ her ($v = |\mathbf{v}|$).
- 2 (c) Berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit \tilde{v} , die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} und die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat v_{rms} für die Maxwellische Geschwindigkeitsverteilung.

5. [3 Punkte] Innere Freiheitsgrade

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas aus Teilchen mit inneren Freiheitsgraden.

- 2 (a) Die Hamilton-Funktion für einen Schwingungsfreiheitsgrad eines Teilchens sei $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$, wobei q eine innere Koordinate des Teilchens ist (Ausdehnung um Ruhekonfiguration) und k eine Konstante. Berechnen Sie die mittlere Schwingungsenergie \overline{E}_{vib} .
- 1 (b) Welches Ergebnis ist für die mittlere Rotationsenergie \overline{E}_{rot} bei einem inneren Rotationsfreiheitsgrad des Teilchens zu erwarten?