

Ihre Lösung ist bis zum 18.12.2013 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [9 Punkte] Mean-Field-Modell für XY- und Heisenberg-Ferromagnet

Betrachten Sie ein System aus N (klassischen) normierten Vektorspins mit 2 bzw. 3 Komponenten, also $\mathbf{S} = (S_x, S_y)$ oder $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ mit $|\mathbf{S}| = 1$. Zwischen Spins auf benachbarten Gitterplätzen i, j bestehe eine ferromagnetische Wechselwirkung, das heißt, eine parallele Orientierung der Spins ist energetisch begünstigt. Die Hamiltonfunktion sei

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i$$

mit nichtnegativen Kopplungen $J_{ij} \geq 0$ und einem vektorwertigen Magnetfeld $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$ bzw. $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$. In der Mean-Field-Näherung werden die Kopplungen ersetzt gemäß $J_{ij} = \frac{J}{N} \forall i, j$ mit $J > 0$.

- 2 (a) Zeigen Sie (analog zur Vorlesung und zur 8. Übung), dass die kanonische Zustandssumme des Mean-Field-Modells gegeben ist durch

$$Z^{(k)} = c \int d\mathbf{m} \exp \left\{ -N \left(\beta \frac{J}{2} \mathbf{m}^2 - \ln \left[\int d\mathbf{S} \exp \{ \beta (J\mathbf{m} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{S} \} \right] \right) \right\},$$

wobei c eine Konstante und $\int d\mathbf{S}$ das normierte Integral über alle Konfigurationen eines Vektorspins ist.

- 1 (b) Führen Sie eine Sattelpunktintegration im Limes $N \rightarrow \infty$ durch und zeigen Sie, dass die freie Energie gegeben ist durch $\beta F = N f(\mathbf{m}_0)$ mit $f(\mathbf{m}) = \beta \frac{J}{2} \mathbf{m}^2 - \ln \left[\int d\mathbf{S} \exp \{ \beta (J\mathbf{m} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{S} \} \right]$ und \mathbf{m}_0 gegeben durch $\left. \frac{\partial f}{\partial m_i} \right|_{\mathbf{m}_0} = 0$ und $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial m_i \partial m_j} \right|_{\mathbf{m}_0} \geq 0$.

- 1 (c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ immer eine Lösung der Sattelpunktgleichung ist.

- 1 (d) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ die Funktion $f(\mathbf{m})$ nur von \mathbf{m}^2 abhängt.

- 1 (e) Zeigen Sie durch Entwicklung in \mathbf{m} , dass für kleine \mathbf{m} für XY-Spins bzw. für Heisenberg-Spins

$$f(\mathbf{m}) = \beta \frac{J}{2} \left(1 - \beta \frac{J}{2} \right) \mathbf{m}^2 + a \mathbf{m}^4 \quad \text{bzw.} \quad f(\mathbf{m}) = \beta \frac{J}{2} \left(1 - \beta \frac{J}{3} \right) \mathbf{m}^2 + b \mathbf{m}^4$$

gilt. Skizzieren Sie $f(\mathbf{m})$ für den Fall von XY-Spins. Unterscheiden Sie dabei zwischen den Fällen $1 - \beta \frac{J}{2} > 0$ und $1 - \beta \frac{J}{2} < 0$.

- 1 (f) Folgern Sie: Oberhalb der kritischen Temperatur T_c ist $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ das absolute Minimum von f , unterhalb von T_c sind alle Magnetisierungsvektoren mit Betrag $|\mathbf{m}| \propto \tau^{\frac{1}{2}}$, $\tau = \frac{T_c - T}{T}$, Lösungen der Sattelpunktgleichung. Welchen Wert hat also der kritische Exponent β ?

Bemerkung: Die kontinuierliche Entartung des Ordnungsparameters ist Ausdruck der kontinuierlichen Symmetrie des Modells.

- 1 (g) Was passiert beim Anlegen eines infinitesimalen Magnetfeldes \mathbf{B} ?

- 1 (h) Berechnen Sie $\mathbf{m}(\mathbf{B})$ bei $T = T_c$ für kleine \mathbf{B} und χ für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ und kleine τ .

2. [7 Punkte] Ideale Quantengase in d Dimensionen

Betrachten Sie freie Teilchen (ohne innere Freiheitsgrade) in $d = 1, 2, 3$ Raumdimensionen (d. h. $\mathbf{p} = p_x, (p_x, p_y)$ oder (p_x, p_y, p_z) mit $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$).

- 2 (a) Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential gegeben ist durch

$$\beta J = \mp \ln(1 \pm z) \pm N \cdot \left(\frac{a}{\lambda_\beta} \right)^d g_{\frac{d+2}{2}}(\mp z) \quad \text{für Fermionen/Bosonen}$$

mit $N \cdot a^d = L$ ($d = 1$), A ($d = 2$) oder V ($d = 3$) und $g_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ der Polylogarithmus.

Hinweis: Ersetzen Sie die Impulssumme durch ein Integral und separieren Sie den Beitrag von $p = 0$ zur kanonischen Zustandssumme.

- 2 (b) Zeigen Sie

$$N = \frac{z}{1 \pm z} + N \cdot \left(\frac{a}{\lambda_\beta} \right)^d g_{\frac{d}{2}}(\mp z) \text{ für Fermionen/Bosonen} \quad .$$

- 2 (c) Zeigen Sie, dass für kleine z (hohe Verdünnung)

$$\frac{pV}{Nk_B T} \approx 1 \pm 2^{-\frac{d+2}{s}} \left(\frac{\lambda_\beta}{a} \right)^d \text{ für Fermionen/Bosonen}$$

ist. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

- 1 (d) Zeigen Sie

$$E = \left. \frac{\partial J}{\partial \beta} \right|_z = \frac{d}{2} pV \quad .$$

3. [3 Punkte] Ultrarelativistische Teilchen

Für ultrarelativistische Teilchen ($p \gg mc$, c Lichtgeschwindigkeit) ist $\varepsilon_p = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2} \approx c|p|$.

- 2 (a) Berechnen Sie analog zu Aufgabe 2 für ultrarelativistische Teilchen $Z^{(gk)}$, J und N .
 1 (b) Zeigen Sie, dass für kleine z

$$\frac{pV}{Nk_B T} \approx 1 + c_d \left(\frac{\lambda}{a} \right)^d$$

ist, wobei c_d eine Konstante ist.

4. [3 Punkte] Bose-Einstein-Kondensation im Experiment

1995 gelang es Anderson et al., die Bose-Einstein-Kondensation in einem verdünnten Gas aus Rubidium 87 Atomen nachzuweisen.

- 1 (a) Ist Rubidium 87 (37 Protonen und Elektronen, 50 Neutronen) ein Boson oder ein Fermion?
 2 (b) Die Teilchendichte im Experiment war $n = \frac{N}{V} = 2.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Bei welcher Temperatur T_c' würden Sie für freie Teilchen das Einsetzen einer Bose-Einstein-Kondensation erwarten? Im Experiment wurden Anzeichen für das Einsetzen von Bose-Einstein-Kondensation unterhalb von $T_c = 170 \text{ nK}$ gefunden. Liegt dieser Wert ober- oder unterhalb Ihres Schätzwertes T_c' ?

Hinweis: $m(^{87}\text{Rb}) = 86.909 \text{ u}$, $g_{\frac{3}{2}}(1) = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.6124$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$: Riemannsche Zetafunktion

5. [8 Punkte] Phononen auf einer schwingenden Saite

Betrachten Sie eine elastische Saite der Länge L mit Masse μ pro Längeneinheit und Spannungskonstante τ . Transversale Auslenkungen seien durch $u(x, t)$ beschrieben. Die Energie (pro Längeneinheit) ist

$$\mathcal{H} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad .$$

Die Saite sei bei $x = 0$ und $x = L$ fixiert.

- 4 (a) Berechnen Sie die spezifische Wärme der quantenmechanischen schwingenden Saite.
Hinweis: Führen Sie die Normalmoden q_k mit $u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_k q_k(t) \sin(kx)$, $k = n\frac{\pi}{L}$, $n = 1, 2, \dots, L$ ein, um ein System ungekoppelter harmonischer Oszillatoren zu erhalten.
 4 (b) Wie lautet die spezifische Wärme der klassischen schwingenden Saite? Unter welchen Bedingungen geht das quantenmechanische Resultat in das klassische Resultat über?