1. Übung - ODE

(Abgabe und Besprechung am 31.10.2018 um 14:00 im CIP-Pool)

1. [*6 Punkte*] **Runge-Kutta**

Während der Präsenzübung haben Sie das Programm ode.py kennen gelernt, dass die gewöhnlichen Differnetialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= ru - puv \\ \dot{v} &= -sv + quv \end{aligned} \tag{1}$$

$(r, s, p, q > 0)$ mithilfe der SciPy- Routine “odeint” löst. Gleichung 1 besitzt einen elliptischen Fixpunkt bei $(u_s = \frac{s}{q}, v_s = \frac{r}{p})$.

(a) i. Zeigen Sie analytisch, dass für alle Trajektorien $u(t)$ und $v(t)$, die Gleichung 1 erfüllen, auch

$$V(u(t), v(t)) = qH(u) + pG(v) = konstant$$

mit $H(u) = u_s \log u - u$ und $G(v) = v_s \log v - v$ gilt.

ii. Zeigen Sie schließlich analytisch, dass die Trajektorien im Phasenraum $(u(t), v(t))$ in der Nähe des Fixpuntes (u_s, v_s) die Ellipsengleichung

$$\frac{\bar{u}^2}{A} + \frac{\bar{v}^2}{B} = 1$$

erfüllen und begründen Sie warum A, B positiv sind. Verwenden Sie die Koordinaten $(u = \bar{u} + u_s, v = \bar{v} + v_s)$ mit $\frac{\bar{u}}{u_s}, \frac{\bar{v}}{v_s} \ll 1$ und die Entwicklung $\log(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2}$.

(b) Fügen Sie nun an der vorbereiteten Stelle das Euler-Verfahren zum Lösen allgemeiner Gleichungen ein. Fügen Sie die Bewegungsgleichungen in der Funktion `equationODE` ein und **nicht explizit** in die Funktion `Euler`.

(c) Fügen Sie nun an der vorbereiteten Stelle das Runge-Kutta-Verfahren 4. Stufe ein. Benutzen Sie die Bewegungsgleichungen aus der Funktion `equationODE` und fügen Sie sie **nicht explizit** in die Funktion `rk` ein.

(d) i. Vergleichen Sie die Lösungen des Euler-Verfahrens und des Runge-Kutta-Verfahrens in der Nähe des elliptischen Fixpunktes (u_s, v_s) mit der Ellipsengleichung aus (a). Wählen Sie hierfür verschiedene Startwerte (u_0, v_0) und variieren Sie die Größe des Zeitschrittes Δt.

ii. Halten Sie den Startwert (u_0, v_0) fest, berechnen Sie $V(t)$ aus (a) für die unterschiedlichen Methoden und variieren Sie dabei Δt. Vergleichen Sie die numerischen Ergebnisse mit dem exakten analytischen Wert.

2. [*4 Punkte*] **Hopf-Bifurkation**

Nun betrachten wir ein erweitertes Volterra-Lotka Model:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= ru(1 - u) - \frac{puv}{1 + mu} \\ \dot{v} &= -sv + \frac{quv}{1 + mu} \end{aligned} \tag{2}$$

$(r, s, p, q, m > 0)$

(a) Bestimmen Sie analytisch alle stationären Punkte des Systems.

(b) Setzten Sie $p = q = 5, s = 1/2, r = 1$ und untersuchen Sie nun die stationären Punkte analytisch. Bestimmen Sie deren Art für $m = 1$ und $m = 2$.

(c) Implementieren Sie die Gleichungen 2 für allgemeine Parameter in der Funktion `equationODE`, um Sie mithilfe ihres Runge-Kutta-Algorithmuses zu lösen.

(d) Setzen Sie von nun $p = q = 5, s = 1/2, r = 1$. Untersuchen Sie numerisch das Verhalten des Systems im Phasenraum $(x(t), y(t))$ in Abhängigkeit von m. Veranschaulichen Sie die Hopf-Bifurkation mithilfe von zwei Bildern des Phasenraums und erläutern Sie.

Weitere Infos finden Sie unter: http://www.uni-saarland.de/fak7/rieger/homepage/teaching.html
Bei Fragen E-Mail an: a.wysocki@lusi.uni-sb.de