2. Übung - PDE

(Abgabe und Besprechung am 15.11.2018 um 14:00 im CIP-Pool)

Ziel dieser Übung ist es eine numerische Lösung einer Variante des Räuber-Beute Modells zu berechnen. Das betrachtete Modell beinhaltet nun eine Ortsabhängigkeit der Räuber-und Beutekonzentration, genannt $v(x,y,t)$ bzw. $u(x,y,t)$ in zwei Dimensionen, wobei x und y die beiden Ortskoordinaten bzeichnen. Die zeitliche Entwicklung wird durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \delta_1 \Delta u + ru\left(1 - \frac{u}{w}\right) - pv\Psi(ku) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta_2 \Delta v + qv\Psi(ku) - sv \\ \Psi &:= \eta \mapsto \tfrac{\eta}{1+\eta}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\delta_1, \delta_2, r, p, k, q, s$ positive Modellparameter sind und Δ den Laplace Operator bezeichnet $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Wir wollen die Gleichung auf einem quadratischen Gebiet $\Omega = [0,L]^2$ der Seitenlänge L lösen. Um die Definition des Systems zu vervollständigen wählen wir Neumannsche Randbedingungen: $\partial u/\partial \mathbf{n} = \partial v/\partial \mathbf{n} = 0$, wobei $\mathbf{n}$ den Normalenvektor am Rand des Simulationsgebietes bezeichnet.

Zur numerischen Lösung diskretisieren wir das Simulationsgebiet durch ein regelmäßiges Gitter mit Gitterkonstante h. Das bedeutet, eine Funktion $f(x,y)$ ist durch ihre Werte an den Gitterplätzen $f(ih, jh) = f_{i,j}$ eindeutig bestimmt, wobei $i, j = 0, \ldots, L/h$. Es läßt sich zeigen, daß die Anwendung des Laplace Operators folgendermaßen approximiert werden kann:

$$(\Delta f)_{i,j} \approx (\Delta_h f)_{i,j} = \frac{1}{h^2}[-4f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1}], \tag{2}$$

wobei Δ_h den diskreten Laplace Operator bezeichnet. Die Randbedingungen benötigen dabei spezielle Behandlung. Betrachten wir zunächst den linken Rand, und stellen uns vor es existieren noch Gitterpunkte für $i = -1$. Wegen der Randbedingung, gilt dann an jedem Platz $(0,j)$: $\partial f/\partial x \approx (f_{1,j} - f_{-1,j})/2h = 0$. Damit läßt sich $f_{-1,j}$ aus $(\Delta_h f)_{0,j}$ eleminieren. Analoges gilt für die anderen Ränder.

Die Zeit diskretisieren wir in konstante Schritte der Länge τ und schreiben für eine Funktion der Zeit am n-ten Zeitschritt $f(n\tau) = f^n$. Die zeitliche Ableitung diskretisieren wir mit der Eulermethode. Sei $\partial f/\partial t = F[f]$ eine Differentialgleichung mit dem Operator F. Dann wird f^{n+1} gegeben durch

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = F[f^n] \tag{3}$$

Der Zeitschritt für das diskretisierte Räuber-Beute System (1) sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \tau\left[\delta_1(\Delta_h u^n)_{i,j} + ru_{i,j}^n\left(1 - \frac{u_{i,j}^n}{w}\right) - pv_{i,j}^n\Psi(ku_{i,j}^n)\right] \\ v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^n + \tau\left[\delta_2(\Delta_h v^n)_{i,j} + qv_{i,j}^n\Psi(ku_{i,j}^n) - sv_{i,j}^n\right] \end{aligned} \tag{4}$$

1. [*3 Punkte*] **Ein bischen Theorie**

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die Approximation des Laplace Operators in einer Dimension her: $\Delta f \approx \frac{1}{h^2}(-2f_i + f_{i-1} + f_{i+1})$ und bestimmen sie die Ordnung des Fehlers in h.

(b) Geben sie eine plausible Erklärung (oder Beweis wenn Sie wollen) für das Stabilitätskriterium $\frac{2D\tau}{h^2} \leq 1$ an. Hinweis: negative Konzentrationswerte sind physikalisch unsinnig.

2. [*6 Punkte*] **Programmierung: Finite Differenzen und Euler Verfahren**

Implementieren Sie die Zeitintegration wie in GL. (4) angegeben. Vervollständigen sie dazu den Rumpf der *integrate* Funktion. Verwenden sie die Approximation für den Laplace Operator wie in GL. (2).

3. [*1 Punkt*] **Nichlineare Dynamik**

Ziel dieser Aufgabe ist es, Ihr Program mit Parametern zu testen, die eine interessante Dynamik erzeugen. Probieren Sie δ_1(im Code d1) $= \delta_2$(im Code d2) $= r = p = w = q = 1, s = 1/2, k = 5, L = 200, \tau = 1/10, h = 1$. Erzeugen Sie dann aus den Datendateien eine Bilderserie und daraus wiederum ein Video. Hinweis: Es sollten Spiralwellen zu sehen sein.

Infos und aktuelle Übungsblätter finden Sie unter: http://www.uni-saarland.de/fak7/rieger/homepage/teaching.html
Bei Fragen E-Mail an: a.wysocki@lusi.uni-sb.de